Pauta Auxiliar #6

P1 a) Si tomamos $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ y definimos $f \mapsto \hat{f}$ como

$$\hat{f} \doteq \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_d) \end{pmatrix},$$

veamos 1° que está bien definida; es decir,

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),\ f = g \Rightarrow \hat{f} = \hat{g}$$

(o sea, $\wedge : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es función). En efecto,

$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, d,\ f(e_i) = g(e_i)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(e_1) \\ \vdots \\ g(e_d) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \hat{f} = \hat{g}$$

Probemos que $\wedge$ es inyectiva:

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),\ \hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f = g.$$

En efecto,

$$\hat{f} = \hat{g} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(e_1) \\ \vdots \\ g(e_d) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, d,\ f(e_i) = g(e_i)$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = g(x)$, ya que la acción de una lineal se caracteriza por cómo actúa en una base de $\mathbb{R}^d$.

$$\Rightarrow f = g$$

Finalmente, veamos la sobreyectividad:

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \exists f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) : y = \hat{f}.$$

En efecto, si $y = (y_1, \dots, y_d)^T$, basta definir $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lineal, mediante su acción en la base:

$$\forall i = 1, \dots, d, \quad f(e_i) \doteq y_i,$$

y así, se tiene que por construcción,

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = y$$

~~Por lo tanto, $\Lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d$ está bien def.,~~

Por último, veamos que es lineal:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \quad \widehat{f + \lambda g} = \hat{f} + \lambda \hat{g}.$$

En efecto,

$$\widehat{f+\lambda g} = \begin{pmatrix} (f+\lambda g)(e_1) \\ \vdots \\ (f+\lambda g)(e_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e_1) + \lambda g(e_1) \\ \vdots \\ f(e_d) + \lambda g(e_d) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_d) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} g(e_1) \\ \vdots \\ g(e_d) \end{pmatrix} = \hat{f} + \lambda \hat{g}$$

Así, $\Lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^d$ está bien def., es biyectiva y es lineal. ∎

Scanned by CamScanner

b) Prueba que $\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $\|f\| = \|\hat{f}\|_2$.

Sol: Probemos las dos desigualdades:

$\leq]$ Pdq: $\|f\| \leq \|\hat{f}\|_2$

En efecto, sea $x \neq 0$, con $x = (x_1, \dots, x_d)^T$.

$$\Rightarrow |f(x)| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{d} x_i e_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{d} x_i f(e_i)\right|$$

$$= |\langle x, \hat{f} \rangle| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x\|_2 \cdot \|\hat{f}\|_2$$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0, \ \frac{|f(x)|}{\|x\|_2} \leq \|\hat{f}\|_2$$

Tomando sup. $\Rightarrow$
$$\sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_2} \leq \|\hat{f}\|_2 \iff \|f\| \leq \|\hat{f}\|_2$$

$\geq]$ Pdq: $\|f\| \geq \|\hat{f}\|_2$

En efecto, como ya sabemos que
$$\sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_2} \leq \|\hat{f}\|_2,$$
si encontramos un $\bar{x} \neq 0$ tal que $\frac{|f(\bar{x})|}{\|\bar{x}\|_2} = \|\hat{f}\|_2$, estaremos listos. En efecto, basta tomar
$$\bar{x} \doteq (f(e_1), \dots, f(e_d))^T = \hat{f}.$$

Así:
$$\frac{|f(\bar{x})|}{\|\bar{x}\|_2} = \frac{\left|f\left(\sum_{i=1}^{d} f(e_i) \cdot e_i\right)\right|}{\|\bar{x}\|_2} = \frac{\left|\sum_{i=1}^{d} f(e_i)^2\right|}{\|\bar{x}\|_2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{d} f(e_i)^2}{\|\bar{x}\|_2} = \frac{\|\bar{x}\|_2^2}{\|\bar{x}\|_2} = \|\bar{x}\|_2,$$

Pero, $\|\bar{x}\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. ∎

c) El proced. fue análogo.

$\leq]$ Sea $x \neq 0$, con $x = (x_1, \dots, x_d)$

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{d} x_i f(e_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i \cdot f(e_i)| = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \cdot |f(e_i)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{d} |x_i| \cdot \max_{i=1,\dots,d} |f(e_i)| = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \cdot \|\hat{f}\|_\infty$$

$$= \|\hat{f}\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^{d} |x_i| = \|\hat{f}\|_\infty \cdot \|x\|_1$$

$$\overset{\text{tomo sup.}}{\Longrightarrow} \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_1} \leq \|\hat{f}\|_\infty \Longleftrightarrow \|f\| \leq \|\hat{f}\|_\infty.$$

$\geq]$ ~~Al basta tomar $\overline{x} \doteq$~~

Sea $i_0 \in \{1, \dots, d\}$ la coordenada de $\hat{f}$ que ~~se~~ alcanza el máximo en $\|\cdot\|_\infty$; esto es,

$$|f(e_{i_0})| = \max_{i=1,\dots,d} |f(e_i)| = \|\hat{f}\|_\infty.$$

Si tomamos $\overline{x} \doteq (0, 0, \dots, 0, \underbrace{|f(e_{i_0})|}_{\text{coord. } i_0\text{-ésima}}, 0, \dots, 0)$:

$$\Rightarrow \frac{|f(\overline{x})|}{\|\overline{x}\|_1} = \frac{\left| \sum_{i=1}^{d} \overline{x}_i f(e_i) \right|}{\sum_{i=1}^{d} |\overline{x}_i|} = \frac{|\cancel{\overline{x}_{i_0}} f(e_{i_0})|}{|\cancel{\overline{x}_{i_0}}|}$$

$$= |f(e_{i_0})| = \max_{i=1,\dots,d} |f(e_i)| = \|\hat{f}\|_\infty \quad \blacksquare$$

(Nótese que también se pudo haber tomado $\overline{x} = e_{i_0}$).

Scanned by CamScanner

P2 | Si X es un evn tal que $\dim X = +\infty$, existe $(e_i)_{i\in I} \subseteq X$ base.

(Es decir

- Es l.i.: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\forall i_1,\dots,i_n \in I$,
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{i_n} = 0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0.$$

- Generan: $\forall x\in X$, $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \in\mathbb{R}$ ~~tales que~~, $\exists i_1,\dots,i_n \in I$ tales que
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{i_n} \;)$$

Podemos decir spg que $\|e_i\| = 1$, $\forall i\in I$, pues si no fuese así, basta tomar los elementos $\frac{e_i}{\|e_i\|}$, que tienen norma 1 y también son base.

~~Así, si se define un op. lineal $T: X\to\mathbb{R}$ mediante su acción en su base, los~~

Como I es un cjto. infinito, es posible tomar $B \subseteq (e_i)_{i\in I}$ infinito numerable, digamos
$$B = \{e_{k_1}, e_{k_2}, e_{k_3}, \dots\}.$$

Así, es posible definir un op. lineal $T: X\to\mathbb{R}$, mediante su acción en la base. Definimos:

$$T(e_i) \doteq \begin{cases} i, & \text{si } i \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{si } i \in I \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Veamos que T es no acotado:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |T(x)| \geq \sup_{i \in I} |T(e_i)|$$

(Esto pues $(e_i)_{i \in I} \subseteq X$ es decir, estamos tomando el sup. en un cjto. más chico.)

$\uparrow$ def. equivalente de norma de operador

pues si $i \in I \setminus \mathbb{N}$, $T(e_i) = 0$

$$= \sup_{i \in \mathbb{N}} |T(e_i)|$$

$$= \sup_{i \in \mathbb{N}} \{i\} = +\infty$$

$$\Rightarrow \|T\| \geq +\infty \Rightarrow \|T\| = +\infty$$

$\Rightarrow T$ es no continuo.

Finalmente, al ser T no continuo, y al ver que T es el único candidato a ser su propia derivada (pues

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|T(x+h) - T(x) - T(h)|}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\cancel{T(x)} + \cancel{T(h)} - \cancel{T(x)} - \cancel{T(h)}|}{\|h\|}$$

$$= \lim_{\|h\| \to 0} \frac{0}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \to 0} 0 = 0.)$$

y como la def. de diferenciabilidad exige la continuidad de la derivada, esto no puede ser.

P3] a) Pruebe que f es dif. en todo $\mathbb{R}^2$

Sol: Como siempre en este curso, separaremos el análisis

por casos:

$\boxed{(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$

Notemos que las der. parciales son:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 2\bar{x}\,\text{Sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}\right) - \cancel{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)}}\cdot\frac{2\bar{x}}{2\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}$

$$= \bar{x}\left[2\,\text{Sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}\right)\right]$$

Análogamente, dada la simetría de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ en f,

- $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = \bar{y}\left[2\,\text{Sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}\right)\right]$

Acá tenemos dos formas de concluir: una corta y la larga.

Forma Corta: Se basa en el teo. que dice:

> Teo: Sea $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Si $\exists$ una vecindad abierta de $\bar{x}$ tq $\forall i = 1,\dots,d$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ es una función continua, entonces f es diferenciable en $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$.

Usando esto, tenemos que:

Como $\forall (\bar{x},\bar{y}) \neq (0,0)$, ~~$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})$ y $\frac{\partial f}{}$~~

$\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,\cdot)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\cdot,\cdot)$ son continuas en una vecindad de $(\bar{x},\bar{y})$ (ya que estas funciones, que calculamos arriba, son súper continuas: el único problema es en $\bar{x}=0, \bar{y}=0$.)

$\Rightarrow f$ es dif. en $(\bar{x},\bar{y})$.

Forma larga: Si definimos $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}), \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})\right)^T$,

basta probar que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(\bar{x}+h_1,\bar{y}+h_2) - f(\bar{x},\bar{y}) - \langle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \nabla f(\bar{x},\bar{y}) \rangle|}{\|(h_1,h_2)^T\|} = 0,$$

(esta que queda propuesta aquí en el caso $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ lo hacemos así)

$\boxed{(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)}$

Acá no queda más remedio que calcular las derivadas parciales por definición. En gral.,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \doteq \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+te_i) - f(\bar{x})}{t}.$$

Así:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right) - 0}{t}$

$= \lim_{t\to 0} t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right) = 0$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2}}\right) - 0}{t} = 0$

$\Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

No queda otra cosa que probar la dif. usando la forma larga (i.e., la definición):

$\underline{\text{Pdq}}: \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \left\langle \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\|(h_1,h_2)^T\|} = 0$

En efecto,

$\lim \% = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|(h_1^2+h_2^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right) - 0 - 0\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$

$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right) = 0$

$\therefore$ f es dif. en 0, lo $\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
y $\therefore$ f es dif. en todo $\mathbb{R}^2$. ∎

b) Pruebe que las der. parciales no son continuas ¿Es *?

Sol: Si fuesen continuas, entonces

- $\lim\limits_{(\bar{x},\bar{y})\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; y
- $\lim\limits_{(\bar{x},\bar{y})\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Pero, basta notar que los términos

$$\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}, \quad \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}}$$

son divergentes si $\bar{x}\to 0 \wedge \bar{y}\to 0$, por lo que no hay continuidad. ▨

Esto no es contradicción: diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ derivadas continuas. Es * sí.

c) Pruebe que f es continua

f derivable $\Rightarrow$ f continua. ▨