Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
29 de Junio de 2018

Clase Auxiliar #8: Planos Tangentes y Teorema de la función Inversa

Profesor: Aris Daniilidis
Auxiliares: Matías Altamirano, Freddy Flores, Pablo López

P1. **(a)** Sea $y \in \mathbb{R}$ fijo. Se define la función:

$$\begin{array}{rccc} I_y : & \mathcal{C}([-L,L]\times[0,y]) & \to & \mathcal{C}([-L,L]) \\ & \phi & \mapsto & I_y(\phi) \end{array}$$

donde $I_y(\phi)$ es una función definida por:

$$I_y(\phi)(z) = \int_0^y \phi(z,s)ds$$

Muestre que I_y es una aplicación lineal continua.

(b) Considere dos funciones $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Calcule la derivada de:

$$h(x) = \int_0^{b(x)} f(x,s)ds$$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función diferenciable en $(0,0)$ tal que:

$$f(0,0) = (0,0), \quad Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que la función $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1,x_2) = f(f(x_1,x_2))$ es diferenciable en el punto $(0,0)$ y calcule el valor de $Dg(0,0)$.

(b) Si además f es clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, concluya a partir de lo anterior que g admite una inversa local en una vecindad de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Calcule explícitamente $D(g^{-1})(0,0)$.

P3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Demuestre que para todo $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe un $\delta > 0$ tal que f es inyectiva sobre $B((x_0,y_0),\delta)$, pero f no es inyectiva sobre $\mathbb{R}^2$

P4. **(a)** **[3 ptos.]** Considere la superficie dada por $z = \ln(2x+y),\ 2x+y > 0$, y el paraboloide de ecuación $z = 5 + (x-1)^2 + (y+2)^2$. Determine la ecuación de la recta dada por la intersección de los planos tangentes a las superficies en los puntos $(-1,3,0)$ y $(2,0,10)$ respectivamente.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$. Sea $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right), y \neq 0\}$.Pruebe que todos los planos tangentes a la superficie C pasan por el origen de coordenadas, esto es, el punto $(0,0,0)$