Pauta P1 - C2 - 2018-1

$$f(x,y) \doteq \begin{cases} \dfrac{x(y-2)\,\mathrm{sen}(x)}{x^2+(y-2)^2} & , (x,y) \neq (0,2) \\ 0 & , (x,y) = (0,2) \end{cases}$$

a) Para $(x,y) \neq (0,2)$, calcule $\partial_x f$ y $\partial_y f$. Pruebe que f es dif. allí.

Sol: Sea $(x,y) \neq (0,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y-2)(\mathrm{sen}(x) + x\cos(x))(x^2+(y-2)^2) - 2x^2(y-2)\,\mathrm{sen}(x)}{(x^2+(y-2)^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\,\mathrm{sen}(x)(x^2+(y-2)^2) - 2x(y-2)^2\,\mathrm{sen}(x)}{(x^2+(y-2)^2)^2}$$

Está claro que para $\forall (x,y) \neq (0,2)$, tanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son continuas en una vecindad en torno a (x,y)

$\Rightarrow f$ es dif. en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,2)\}$. ■

b) Calcule $Df((0,2);u)$, con $u=(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Sol:
$$Df((0,2);u) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,2)+tu) - \cancel{f(0,2)}^{\to 0}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\cancel{t}} \cdot \frac{\cancel{t}u_1(\cancel{2}+tu_2-\cancel{2})\,\mathrm{sen}(tu_1)}{t^2u_1^2 + (\cancel{2}+tu_2-\cancel{2})^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{u_1 \cdot t u_2 \cdot \mathrm{sen}(tu_1)}{t^2(u_1^2+u_2^2)}$$

$$= \frac{u_1^2 \cdot u_2}{u_1^2+u_2^2} \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{\mathrm{sen}(tu_1)}{t \cdot u_1}}_{\to 1} \quad \left(\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1\right)$$

$$= \frac{u_1^2 \cdot u_2}{u_1^2+u_2^2}$$