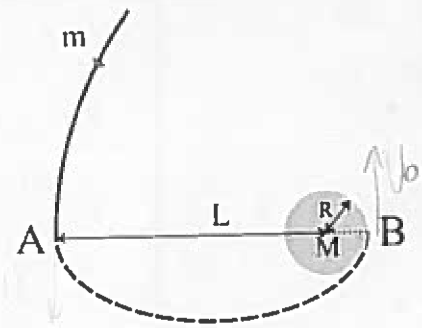
1. Un transbordador espacial (masa m) se aproxima a la Tierra (masa M) en una trayectoria parabólica debida exclusivamente a la atracción gravitacional terrestre. Cuando la nave se encuentra en su perigeo a una distancia L del centro de la Tierra (punto A en la figura), enciende brusca y brevemente sus motores disminuyendo instantáneamente su rapidez. Como consecuencia, el transbordador pasa a una órbita elíptica que le permite llegar luego tangencialmente a la superficie terrestre en B. Se pide determinar la pérdida de energía cinética que el transbordador debe sufrir en A. Suponga conocidos: C=GM, m, L, y el radio de la Tierra: R. Desprecie todo roce.



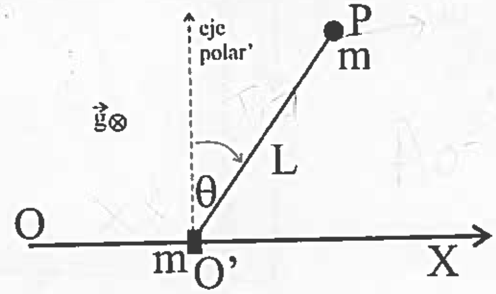
2. Un carro puntual, O', de masa m está restringido a moverse sobre un riel rectilíneo que define un eje X. Una partícula P de masa m está atada al carro mediante una cuerda ideal de largo L. El carro, la partícula y el riel se encuentran todos en un mismo **plano horizontal** y todo tipo de roce es despreciable. En la condición inicial $\theta = 0$, el carro está en reposo, la cuerda está estirada y se le da a P una velocidad inicial de magnitud v_o y dirección paralela al riel.

a) Escriba la ecuación de movimiento para la coordenada X del carro O' medida respecto de un punto fijo O del riel.

b) Escriba las ecuaciones de movimiento de P utilizando un sistema de coordenadas polares cuyo origen se mueve con el carro O' y cuyo eje polar se mantiene perpendicular al riel, como indica la figura.

c) Combine las ecuaciones obtenidas en a) y b) para encontrar una ecuación diferencial $\ddot{\theta}(\theta, \dot{\theta})$.

d) Determine los valores máximos y mínimos que alcanzan $\dot{\theta}$ y la tensión T de la cuerda en el movimiento resultante, indicando los ángulos θ en que ellos ocurren.



Indicaciones:
$\int \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta}\,d\theta = \ln(1+\sin^2\theta)+C$
Suponga que el riel no afecta el movimiento de P al pasar sobre él en algún momento.

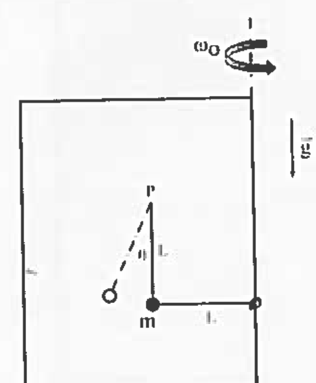
3. Considere que la placa rectangular indicada en la figura se encuentra girando con velocidad angular constante ω_o en torno de un eje vertical que coincide con uno de sus bordes. A una distancia L del eje cuelga desde el punto P de la placa un péndulo ideal de masa m y largo L. Éste se mantiene en posición vertical debido a la acción de una cuerda ideal horizontal que une la masa del péndulo con el eje de rotación. Todos los roces son despreciables.

a) Determine las fuerzas reales actuando sobre la masa del péndulo en esas condiciones.

Si en un instante se corta la cuerda horizontal que mantenía al péndulo en posición vertical, determine:

b) La velocidad angular $\dot{\theta}$ en función del ángulo θ, suponiendo que la masa m se mantiene en contacto con la placa y que la cuerda del péndulo permanece en tensión.

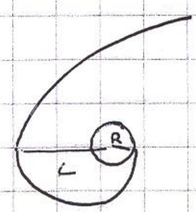
c) ¿Pierde contacto la masa del péndulo con la superficie de la placa en algún momento? Justifique su respuesta.



$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} - m\vec{A}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - m\,\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'$$

$$r = \frac{h^2/C}{1+\sqrt{1+\frac{2\epsilon h^2}{C^2}}\cos\theta} \qquad r = \frac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta}$$

(P1)



órbita elíptica

$$r_{min} = R$$

$$r_{max} = L$$

$$R\frac{(1+e)}{(1-e)} = L \Rightarrow R(1+e) = L(1-e)$$

$$e(R+L) = L-R$$

$$e = \frac{L-R}{L+R} < 1 \checkmark$$

$$\frac{h^2}{C} = R(1+e) = R\left(\frac{L+R+L-R}{L+R}\right) = \frac{2LR}{L+R}$$

$$\sqrt{1+\frac{2\varepsilon h^2}{C^2}} = \frac{L-R}{L+R}$$

$$1 + 2\,\frac{2LR}{L+R}\,\frac{\varepsilon}{C} = \left(\frac{L-R}{L+R}\right)^2$$

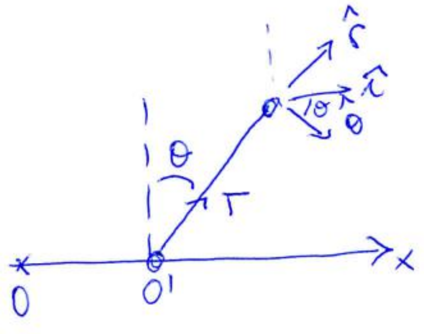
$$\frac{4LR}{C}\varepsilon = \frac{(L-R)^2}{L+R} - (L+R) = \frac{(L^2+R^2-2LR)-(L^2+R^2+2LR)}{(L+R)}$$

$$\frac{4LR\varepsilon}{C} = \frac{-4LR}{(L+R)} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{C}{L+R}$$

$$\varepsilon_{parábola} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\varepsilon_A = -\frac{C}{L+R}}$$

P21

a)



$$m\ddot{x} = T \operatorname{sen}\theta \quad (1)$$

b)

$$\hat{r}) \quad -mL\dot{\theta}^2 = -T - m\vec{A}_{o'} \cdot \hat{r}$$

$$\hat{\theta}) \quad mL\ddot{\theta} = -m\vec{A}_{o'} \cdot \hat{\theta}$$

$$\vec{A}_o = \ddot{x}\,\hat{\imath}$$

$$\hat{\imath} = \operatorname{sen}\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$$

$$\therefore \quad -mL\dot{\theta}^2 = -T - m\ddot{x}\operatorname{sen}\theta \quad (2)$$

$$mL\ddot{\theta} = -m\ddot{x}\cos\theta \quad (3)$$

c)

$$(1)\ y\ (2) \rightarrow \quad mL\dot{\theta}^2 = T(1+\operatorname{sen}^2\theta) \quad (4)$$

$$(1)\ y\ (3) \rightarrow \quad mL\ddot{\theta} = -T\operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad (5)$$

$$(4)\ y\ (5) \rightarrow \quad \cancel{mL}\ddot{\theta} = -\frac{\cancel{mL}\dot{\theta}^2}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \quad (6)$$

d) $$\ddot\theta = \dot\theta \frac{d\dot\theta}{d\theta} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\dot\theta^2\right)}{d\theta} = -\dot\theta^2 \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\int \frac{d\dot\theta^2}{\dot\theta^2} = -\int \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\ln\left(\frac{\dot\theta^2}{\dot\theta_i^2}\right) = \ln\left(\frac{1+\operatorname{sen}^2\theta_i}{1+\operatorname{sen}^2\theta}\right)$$

$\theta_i = 0 \quad \dot\theta_i = \frac{v_0}{L}$

$$\dot\theta^2 = \frac{(v_0/L)^2}{1+\operatorname{sen}^2\theta} \qquad (7)$$

$\dot\theta_{MAX} = \frac{v_0}{L}$ para $\theta = 0, 180°$

$\dot\theta_{MIN} = \frac{v_0}{\sqrt{2}\,L}$ para $\theta = 90°, 270°$

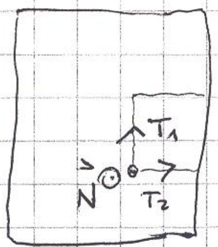
(7) en (4) $\rightarrow$ $$T(\theta) = \frac{mL\left(\frac{v_0}{L}\right)^2}{(1+\operatorname{sen}^2\theta)^2}$$

$T_{MAX} = m\frac{v_0^2}{L}$ para $\theta = 0°; 180°$

$T_{MIN} = \frac{m}{4}\frac{v_0^2}{L}$ para $\theta = 90°, 270°$

(P3)

a)



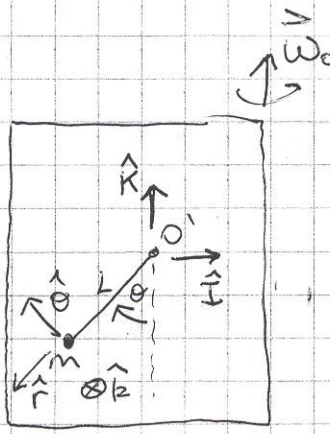
es un MCU:

$$\vec{T}_1 = m\vec{g}$$

$$\vec{T}_2 = mL\omega_0^2(-\hat{r}) \quad \text{(centrípeta)}$$

$$\vec{N} = \vec{0}$$

b)



$$\vec{\Omega}_e = \omega_0 \hat{K} \qquad \vec{\alpha}_e = \vec{0}$$

$$\vec{A}_o = L\omega_0^2 \hat{I}$$

$$\hat{K} = \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta} - \cos\theta\,\hat{r}$$

$$\hat{I} = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{r} - \cos\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{T} = -T\hat{r}$$

$$m\vec{g} = -mg\hat{K} = -mg(\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta} - \cos\theta\,\hat{r})$$

$$\vec{N} = -N\hat{k}$$

$$\vec{F}_{M+O} = -mL\omega_0^2(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{r} - \cos\theta\,\hat{\theta})$$

$$\vec{F}_{cf} = -m\,\omega_0\hat{K} \times (\omega_0(\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta} - \cos\theta\,\hat{r}) \times L\hat{r})$$

$$= -m\,\omega_0^2 L(\operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta} - \cos\theta\,\hat{r}) \times (-\operatorname{sen}\theta\,\hat{k})$$

$$\vec{F}_{cf} = m\omega_0^2 L \,\text{sen}\theta (\text{sen}\theta\, \hat{r} + \cos\theta\, \hat{\theta})$$

$$\vec{F}_{COR} = -2m\,\omega_0 (\text{sen}\theta\, \hat{\theta} - \cos\theta\, \hat{r}) \times L\dot{\theta}\, \hat{\theta}$$

$$= 2m\omega_0 L\dot{\theta} \cos\theta\, \hat{k}$$

$$\vec{F}_T = \vec{0}$$

Ec. de mto en $\hat{\theta}$:

$$m L \ddot{\theta} = -mg\,\text{sen}\theta + m L\omega_0^2 \cos\theta + m L\omega_0^2\, \text{sen}\theta\cos\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \text{sen}\theta + \omega_0^2 \cos\theta + \omega_0^2\, \text{sen}\theta\cos\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \left(-\frac{g}{L}\text{sen}\theta + \omega_0^2\cos\theta + \omega_0^2\,\text{sen}\theta\cos\theta\right) d\theta$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{L}(1-\cos\theta) + \omega_0^2\,\text{sen}\theta + \frac{\omega_0^2}{2}\text{sen}^2\theta}$$

c) $\hat{k}$: $\quad 0 = -N + 2mL\omega_0\dot{\theta}\cos\theta$

$\Rightarrow \quad N = 2mL\omega_0\,\dot{\theta}\cos\theta$

$N<0$ si $\dot{\theta}<0$ o bien $\theta > 90°$,

por lo tanto sí se separa al devolverse

o bien al hacerse $\theta > 90°$.

Control 3 de Mecánica.

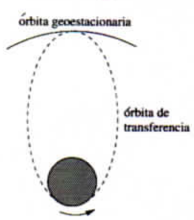
C. Romero

22 de Julio de 2013   Tiempo: 2 hrs. 50 min.

P1. Un planeta de masa M y radio R tiene período de rotación T en torno a su propio eje. El planeta no tiene atmósfera. Desde la superficie de este planeta se dispara una nave de masa m con velocidad $\vec{v}_1$ tangencial a la superficie y en el mismo sentido en que gira el planeta (ver figura). A partir de ese momento sólo actúa sobre la nave la fuerza de atracción gravitacional ejercida por el planeta. La magnitud de $\vec{v}_1$ se mide con respecto a la superficie del planeta, y es la necesaria para poner a la nave en una órbita elíptica cuyo radio máximo coincide con el radio de la órbita circular geoestacionaria (esto es, una órbita circular cuyo período es igual al período de rotación T del planeta en torno a su eje. Al llegar a la órbita geoestacionaria, los motores de la nave se encienden por un instante para ajustar su velocidad de manera que permanezca en la órbita geoestacionaria.

a) Determine la magnitud de $\vec{v}_1$.

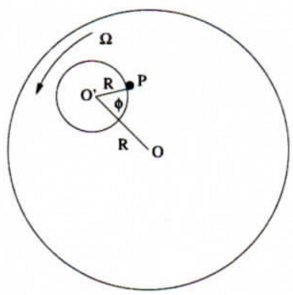
b) Determine variación de momentum que debe experimentar el satélite para pasar de la órbita elíptica a la órbita geoestacionaria.



P2. Un cilindro de eje vertical y radio R está adosado (fijo) a una plataforma horizontal (un gran disco) que rota con velocidad angular $\Omega\,\hat{k}$ (Ω constante positiva) en torno a un punto fijo O ubicado a una distancia $2R$ del centro del cilindro (punto O').Una partícula de masa m desliza sin roce sobre la plataforma y en contacto con la superficie del manto del cilindro de radio R. Si llamamos ϕ al ángulo OO'P y la partícula inicia su movimiento en la posición $\phi = 0$, con velocidad angular inicial muy pequeña, se pide:

a) Encontrar una expresión para la velocidad angular $\dot{\phi}$ (para cualquier instante t, previo a la separación).

b) Determinar una ecuación para el ángulo ϕ_s para el cuál la partícula se separa del cilindro.



P3. Una barra uiforme de largo L y masa M descansa sobre un plano horizontal sin roce con su centro de masa en contacto con un poste vertical fijo, tal como se muestra en la vista aérea de la figura. En el instante $t = 0$ se aplica en el punto C, ubicado a una distancia L' del centro de la barra, una fuerza percusiva, perpendicular a la barra. Calcule el máximo valor que puede tener L' para que la barra no choque contra el poste.

NOTA. Una fuerza percusiva es una fuerza que dura un intervalo de tiempo muy corto, durante el cuál el objeto aún no se mueve. Durante ese intervalo de tiempo la fuerza percusiva puede considerarse constante.

Fórmulas.

Orbitas.

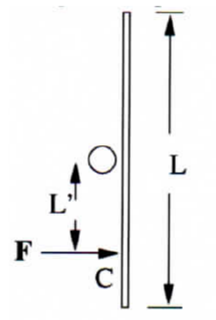
$$r(\theta) = \frac{A}{1 + e\cos\theta} \qquad A = \frac{l^2}{G\,M\,m^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,l^2}{(GM)^2 m^3}}$$

Ecuación de movimiento en un sistema no inercial.

$$m\,\vec{a} = \vec{F} - m\,\vec{a}_0 - m\,\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}) - 2\,m\,\vec{\Omega}\wedge\vec{v} - m\,\dot{\vec{\Omega}}\wedge\vec{r} \quad (1)$$

Pauta P3



Consideremos que la fuerza percusiva F es efectuada, perpendicular a la barra, durante un instante t_p a una distancia $\vec{r} = L'$ del centro de masas del sistema. Durante este instante, F es constante. Sabemos que

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \tau = \vec{r} \times F = L'F\hat{k}$$
$$m\vec{a} = F\hat{x}$$

Siendo la primera ecuación la relación entre torque y momento angular $\vec{l}$ y la segunda la segunda ley de Newton. Considerando lo anteriormente descrito, al integrar en el tiempo obtenemos

$$\vec{l} = I\omega = L'Ft_p\hat{k}$$

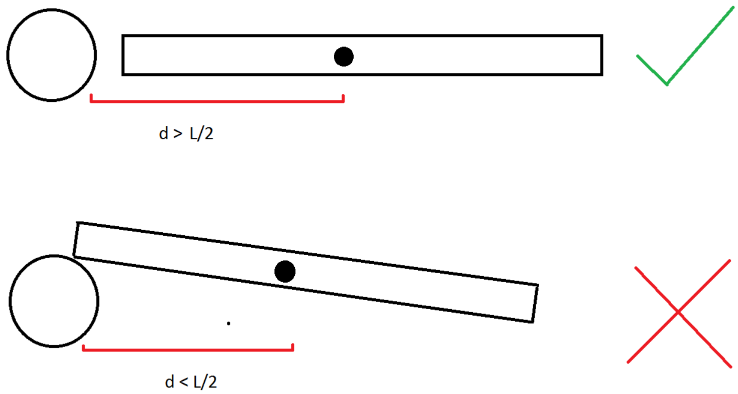
$$m\vec{v} = Ft_p\hat{x}$$

De aquí, podemos despejar ω y v

$$\omega = \frac{L'Ft_p}{I}$$

$$v = \frac{Ft_p}{m}$$

Siendo estas velocidades constantes durante el resto del movimiento (Ya que la fuerza percusiva deja de actuar)
La barra chocará con el poste cuando gire $\theta = \frac{\pi}{2}$. La condición para que esto no ocurre es que, al haber girado este ángulo, el centro de masas se encuentre a $d \geq \frac{L}{2}$. El límite (y por lo tanto, la distancia mínima) se obtiene cuando $d = \frac{L}{2}$ al mismo tiempo que $\theta = \frac{\pi}{2}$



Otra forma de ver esto, es que t_d el tiempo en que el centro de masas recorre una distancia $\frac{L}{2}$ tiene que ser menor a t_θ el tiempo en que la barra rota en $\frac{\pi}{2}$. El límite se tiene cuando $t_d = t_\theta$ En números:

$$\theta(t_c) = \frac{\pi}{2}$$

$$d(t_c) = \frac{L}{2}$$

Con $t_c = t_d = t_\theta$ el tiempo crítico. Como la velocidad lineal y angular del sistema es constante, nos queda

$$\omega t_c = \frac{L' F t_p t_c}{I} = \frac{\pi}{2}$$

$$v t_c = \frac{F t_p t_c}{m} = \frac{L}{2}$$

Reordenando términos, tenemos que

$$F t_p t_c = \frac{I\pi}{2L'}$$

$$F t_p t_c = \frac{Lm}{2}$$

Igualando y reemplazando $I = \frac{ML^2}{12}$

$$\frac{Lm}{2} = \frac{mL^2\pi}{24L'}$$

$$L' = \frac{L\pi}{12} \approx \frac{L}{4}$$

Obs: El arco descrito por el extremo de la barra es $\frac{L\pi}{2}$, la que es mayor a la distancia $\frac{L}{2}$ que debe desplazarse el centro de masas, por lo que la condición de $\omega\frac{L}{2} = v$ no nos da el valor mínimo de L'.