Auxiliar # 2

Tensores

Auxiliar: Cristóbal Zenteno

04/10/2018

Problema 1: [Derivadas Parciales y cambios de coordenadas.]

En este problema estudiaremos como se comportan las derivadas parciales frente a cambios de coordenadas, para ello vamos a demostrar las siguientes propiedades:

- $\partial_{i'} f = L^i_{i'} \partial_i f$, con f función escalar.
- $\partial^{i'} f = L^i_{i'} \partial_i f$.
- $\partial^{j'} \partial_{j'} = \partial^j \partial_j$.

Problema 2: [Electromagnetismo en forma Tensorial (Introducción)]

Para este problema, en primer lugar, recordemos las conocidas leyes de Maxwell que gobiernan el electromagnetismo macroscópico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

a) Escribir estas ecuaciones de forma tensorial, teniendo especial cuidado en escribir el campo magnético con su forma de tensor. Ver que ocurre con la última ecuación frente a un cambio de coordenadas.

b) Si ahora introducimos los potenciales escalar (Φ) y vector ($\vec{A}$), donde los campos están definidos de la forma:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Reescribir las ecuaciones de Maxwell de forma tensorial usando estos potenciales.

c) Ahora, como la desición de elegir estos potenciales es arbitraria, podemos hacer una transformación en estos de la forma:

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

Ver que ocurre en las ecuaciones de Maxwell.

Problema 3: [Ecuación de continuidad del momentum para un fluido]

En este problema usaremos la notación tensorial (y un par de definiciones) para encontrar y estudiar la ecuación de conservación del momentum de un fluido con densidad ρ.

a) Definimos la derivada material de un fluido que se mueve con velocidad $\vec{v}$ como:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)$$

Escribir la derivada material para el momentum del fluido con notación tensorial.

b) Además podemos caracterizar las fuerzas en el fluido como las fuerzas de volumen ($\rho\vec{f}$) y fuerzas de superficie ($\partial_j \sigma^{ij}$), con σ tensor de esfuerzos. Si podemos separar el tensor de esfuerzos en una parte diagonal asociada a la presión y en una parte sin traza arbitraria, escribir la ecuación de moviemiento del fluido.

c) Para un fluido incompresible, tenemos que el tensor de esfuerzos está definido como:

$$\sigma_{ij} = \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij} \nabla v) + \nu \delta_{ij} \nabla v$$

Encontrar la ecuación de movimiento para un fluido incompresible.