Ejemplo inicial: Spin 1/2 nueva perspectiva.

Tenemos el conjunto de vec $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$, corresp. a $\mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2}$. En este espacio actúa el op. $\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, que tiene autovec. $|jm\rangle$.

$J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$.

Además, $J_z |++\rangle = \hbar |++\rangle \Rightarrow |++\rangle$ autovec de J_z, con $m = 1$.

Análogo con $|--\rangle$.

- $J_- |1,1\rangle = \hbar \sqrt{1(1+1) - 0}\, |1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}\, |1,0\rangle$

  $= (J_{-1} + J_{-2})(|++\rangle) = \hbar \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}\, |-+\rangle + \hbar |+-\rangle = \hbar (|-+\rangle + |+-\rangle)$

  $\Rightarrow |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-+\rangle + |+-\rangle)$

Pero falta un vector! Este también tiene $m=0$, porque en el espacio original es degenerado. Debe ser spin 0.

$|0,0\rangle = \alpha |+-\rangle + \beta |-+\rangle$

- Ortogonal a $|1,0\rangle \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta \quad 2\alpha^2 = 1$

  $\Rightarrow |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)$

Scanned with CamScanner

Cátedra Jueves: Suma de Mom. Angular

Quizás: repaso para $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{2}$.

¿Por qué querríamos interesarnos en $\vec{S}_1 + \vec{S}_2$?

Imaginemos un Hamiltoniano de la forma $H = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \, \alpha$. Antes (ej: Aux 1) teníamos cosas del estilo $H = \gamma \vec{B} \cdot \vec{S} = \gamma B_z S_z$, cuyos autovectores eran fáciles, simplemente $|\frac{1}{2}, m\rangle$. Ahora cambia la cosa. Expandiendo,

$H = \alpha(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z})$. $[S_{1i}, S_{2j}] = 0$ por actuar en $\mathcal{H}$'s distintos, lo que facilita un poco la vida. Pero ahora algo como $|m_{1z}, m_{2z}\rangle$ no es autovector de H! Qué hacemos?

$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ se expresa de otra forma, $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}\{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 - S_1^2 - S_2^2\}$

Por lo tanto, estados con s_1, s_2 bien definidos, y algo que ver con $\vec{S}_1 + \vec{S}_2$, nos determinan cómo diagonalizar H. (olvidar $|m_{1z}, m_{2z}\rangle$ porque los S_{1x}, etc. molestan ahora).

$S^2 \equiv (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z})$

$S_{1\pm} = S_{1x} \pm iS_{1y}$ $\quad S_{2\pm} = S_{2x} \pm iS_{2y} \Rightarrow S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} = (S_{1x} + iS_{1y})(S_{2x} - iS_{2y}) + (S_{1x} - iS_{1y})(S_{2x} + iS_{2y})$

$= S_{1x}S_{2x} + iS_{1y}S_{2x} - iS_{1x}S_{2y} + S_{1y}S_{2y} + S_{1x}S_{2x} - iS_{1y}S_{2x} + iS_{1x}S_{2y} + S_{1y}S_{2y} = 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y})$

$\Rightarrow S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+} + 2S_{1z}S_{2z}$ $\quad \boxed{S_\pm|m\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m\pm1)}\,\hbar\,|m\pm1\rangle,\ S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle}$

Operamos esto sobre nuestra base anterior

$S^2|+\rangle|+\rangle = \left(\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 + 0 + 0 + 2\hbar^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)|+\rangle|+\rangle = 2\hbar^2|+\rangle|+\rangle \Rightarrow s = 1$, $|+\rangle|+\rangle$ autoestado

$S^2|-\rangle|-\rangle = 2\hbar^2|-\rangle|-\rangle \Rightarrow s = 1$, $|-\rangle|-\rangle$ autoestado

$S^2|+\rangle|-\rangle = \frac{6}{4}\hbar^2|+\rangle|-\rangle + 0 + \hbar^2\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)}\,|-\rangle|+\rangle - \frac{1}{2}\hbar^2|+\rangle|-\rangle = \hbar^2(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle)$

$S^2|-\rangle|+\rangle = \hbar^2(|-\rangle|+\rangle + |+\rangle|-\rangle)$

$\Rightarrow S^2(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle) = 2\hbar^2(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle) \Rightarrow$ autoestado, $s = 1$

$S^2(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle) = 0$, autoestado, $s = 0$.

Triplete simétrico bajo intercambio, singlete no.

$\Rightarrow$ e.g. dos e^- juntos deben estar en estado $s=0$.

Pregunta: Originalmente queríamos autoestados de $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, entonces usamos truco con $\vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Pero para calcular $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ usamos truco $S_\pm$ para encontrar acción de $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$! Por qué pasar por suma?

Scanned with CamScanner

1) La suma de spins por sí sola es algo interesante

2) Nos dimos cuenta que los buenos autoestados cuando hay $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ tienen que ver con mom. angular total.

3) ? $[\vec{L}, H] = 0$ por ej. si $H \sim \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ (análogo a clásica!)

Consecuencia para 2 fermiones juntos: son un boson!

Preg: ¿comportamiento físico depende de cómo separamos un sistema?

Ej: Dos electrones juntos, son un boson. Heurísticamente, la supercond. (cooper pairs) se puede entender con esto. (Not really but good for image)

Ahora atacamos el prob. general.

Tenemos $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$. $[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_{1k}$, etc.

$J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}$ conmutan $\Rightarrow$ podemos formar una base con todos sus autoestados.

$J_1^2 |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1 m_1\rangle$, $J_{1z}|j_1 m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle$, análogo en 2.

j_1 puede ser $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ dep. de la situación. $m_1 \in \{-j_1, -j_1+1, \dots, j_1\}$.

Sea $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. También es op. mom. angular por satisfacer las rel. de conmutación adecuadas. $\Rightarrow J^2|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|jm\rangle$, $J_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle$.

<u>Pregunta</u>: ¿Cuál es la relación entre (j, m) y (j_1, m_1, j_2, m_2)?

Y entre $|jm\rangle$ y $|j_1 m_1\rangle, |j_2 m_2\rangle$?

Dado j_1, el espacio de autovec. de J_{1z} y J_1^2 es de dim. $2j_1+1$. Análogo en 2.

Fijamos j_1 y j_2. Dados j_1, j_2, los autovec. de $J_{1z}, J_1^2, J_{2z}, J_2^2$ forman un $\mathcal{H}$ de dim $(2j_1+1)(2j_2+1)$, con base $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$.

Recordar ej. inicial de la clase. Teníamos $|m_1 m_2\rangle$ $(j_1 = j_2 = \frac{1}{2})$ y la base para $\vec{S}_1 + \vec{S}_2$ ya no sería esa. Dim del espacio?

Scanned with CamScanner

Otra cosa del ejemplo inicial: teníamos un <u>espacio producto</u> $\mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2}$, con vec. del tipo $|+\rangle|+\rangle$, etc., y logramos mostrar que es igual a la <u>suma vectorial</u> de los espacios $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_0$

$$\boxed{\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0}$$

Recuerden: en qué espacio actúa $\vec{J}$?

Queremos lo análogo ahora en gral.

$$j_1 \otimes j_2 = \underbrace{(\ ) \oplus (\ ) \oplus \cdots}$$

1) Cuántos hay?

2) Qué spins se permiten? Adivinen

3) Cómo expandir los autovectores de J^2, J_z en términos de los de J_1^2, etc?

En spin $\frac{1}{2}$, 1) 2 2) 1, 0 3) Triplete, singlete

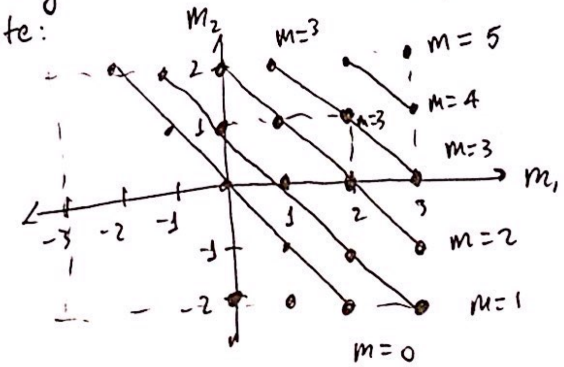
Cada subespacio en la suma vectorial contiene un solo autovector de S_z corresp. a cada uno de los m t.q. $m \le j$.

$J_z = J_{1z} + J_{2z} \Rightarrow m = m_1 + m_2 \Rightarrow m \in \{-j_1-j_2, \ldots, j_1+j_2-1, j_1+j_2\}$

Plan: encontrar la degeneración de estos valores. Con esto podemos saber cuántos subespacios hay en la suma vectorial, y los spins permitidos.

Forma: geométricamente:

Todos los estados $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$ están representados aquí!



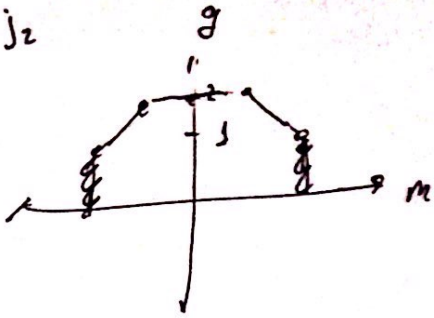
en cada línea: degeneración del valor de m.

$g(j_1+j_2)=1$, $g(j_1+j_2-1)=2$, ... el grado de deg. aumenta por 1 cuando m disminuye por 1, hasta que alcanzamos la esquina derecha inferior del rectángulo. Ahí la deg. es máxima, e igual a $2j_2+1$. Esta deg. se mantiene hasta la recta que alcanza la esquina izq. superior del rectángulo.

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow g(m) = 2j_2+1$ para $-(j_1-j_2) \leq m \leq j_1-j_2$

y de ahí la degeneración disminuye.



Hay <u>un</u> subespacio invariante

corresp. a $j_1+j_2=m$. $\mathcal{H}_{j_1+j_2}$

Hay <u>dos</u> corresp. a $j_1+j_2-1=m$. $\mathcal{H}_{j_1+j_2-1}$, etc.

Consideramos los subespacios con ~~spin total~~ mom. angular definido.

Pregunta: Cómo sabemos que cada $\mathcal{H}$ de verdad contiene otros estados? Op. de subida y bajada! Con J_-, el estado con $m=j_1+j_2$ baja a j_1+j_2-1, etc...

Ahora, mínimo valor de j? El estado con $m=0$ ya está en $\mathcal{H}_{j_1+j_2}$, $\mathcal{H}_{j_1+j_2-1}$, ... Pero solo hay $2j_2+1$ de estos estados!

$\Rightarrow$ el último subespacio que contiene a $m=0$ es $\mathcal{H}_{j_1-j_2}$

$\Rightarrow j \in \{j_1+j_2, \dots j_1-j_2\}$

Cómo sabemos, ahora, si con todos estos subespacios tenemos la misma cantidad de estados que antes? Porque ahora solo hay etiqueta j, m, mientras que antes era j_1, m_1, j_2, m_2.

Contando!

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Dim antes:} & (2j_1+1)(2j_2+1) \\ \text{Dim ahora:} & \displaystyle\sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} 2j+1 \end{array}\right\} \text{mostrar igualdad!}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} = \mathcal{H}_{j_1+j_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{j_1-j_2}$$

Ahora, solo falta ver cómo relacionar autoestados de J^2, J_z con los de J_1^2, etc.

Scanned with CamScanner

Nuevamente, recurrimos a la idea del m máximo. Solo hay uno en cada espacio

$$\Rightarrow |m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle = |m = j_1+j_2, j = j_1+j_2\rangle$$

Notación: $|m_1 m_2\rangle$, $|j\, m\rangle$

Podemos aplicar J_-

$$\Rightarrow J_-|j=j_1+j_2, m=j_1+j_2\rangle = |j=j_1+j_2, m=j_1+j_2-1\rangle \cdot \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\cdot\hbar$$

$$= J_-|m_1=j_1, m_2=j_2\rangle = (J_{1-}+J_{2-})|m_1=j_1, m_2=j_2\rangle$$

$$= |m_1=j_1-1, m_2=j_2\rangle\cdot\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}\cdot\hbar + |m_1=j_1, m_2=j_2-1\rangle\sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}\cdot\hbar$$

$\Rightarrow$ tenemos $|j=j_1+j_2, m=j_1+j_2-1\rangle$ en términos de $|m_1, m_2\rangle$.

$\vdots$ y así

hasta llegar a $m=0$. Otro lado de la escalera comienza desde $m=-j_1-j_2$.

$\Rightarrow$ Tenemos todos los $|j=j_1+j_2, m=?\rangle$!

Cómo bajar el j? Si nos paramos en $\mathcal{H}_{j_1+j_2-1}$, analicemos el estado de m más alto nuevamente. Sí o sí debe ser de la forma

$$|j=j_1+j_2-1, m=j_1+j_2-1\rangle = \alpha|m_1=j_1-1, m_2=j_2\rangle + \beta|m_1=j_1, m_2=j_2-1\rangle$$

Normalizado $\Rightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2=1$. Otra condición? Ortogonal a $|j=j_1+j_2, m=j_1+j_2-1\rangle$! De ahí bajar la escalera.

Para $j=j_1+j_2-2$: análogo, ahora con 2 relaciones de ortonormalidad.

Y así relacionamos la base $|jm\rangle$ con la $|j_1j_2m_1m_2\rangle$!

$$|j\,m\rangle = \sum_{m_1,m_2}|j_1j_2m_1m_2\rangle\underbrace{\langle j_1j_2m_1m_2|j\,m\rangle}$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan, los cuales recién aprendimos a construir :)

Scanned with CamScanner