

Scattering

Plan:

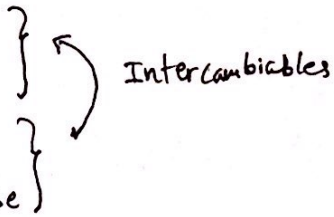
I) Intro, motivación, conceptos básicos (def \rightarrow corriente $\rightarrow |f(\theta, \phi)|^2$)

II) E.C. integral

III) Aprox. de Born

IV) Ondas parciales

V) Pot. $V(r)$, cambio de fase



I) En genl. nos interesa estudiar scattering porque es "fácil" hacer exp. reales con los cuales comparar resultados teóricos. Nos entrega info sobre interacciones entre partículas, y sobre las partículas mismas.

1) Nos interesa el comportamiento de la función de onda $\psi(\vec{r})$ en 3-D. Caso que ya conocen es 1-D con pozos, etc. donde calculaban cosas como T. Otra perspectiva, útil para scattering relativista, es trabajar con la matriz S, ver Weinberg. $S_{\alpha\beta} = \langle \psi_{\alpha}^{-}, \psi_{\beta}^{+} \rangle$. Algunos supuestos:

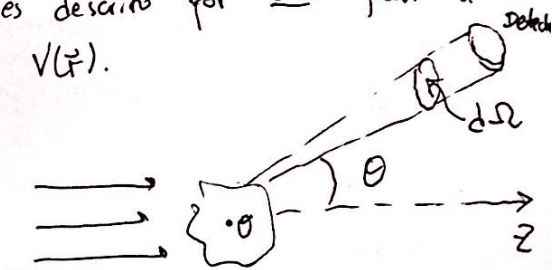
ψ_{α}^{-} (No lo usamos) ψ_{β}^{+} (out) ψ_{β}^{+} (in)

i) No hay spin

ii) Hay solo un proceso de scattering

iii) Interacción se describe por $V(\vec{r}, -\vec{r}_2) \Rightarrow$ todo es descrito por una partícula $V(\vec{r})$.
de masa $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ en un pot.

Sección Eficaz: Enviamos partículas libres, un flujo incidente F_i (#/(tiempo·área))



Medimos el # de partículas que entran a nuestro detector, $V(\vec{r})$. dn . Si el detector subtende un ángulo $d\Omega$, tenemos que dn es proporcional a $d\Omega$ y a $F_i \Rightarrow dn = F_i D(\theta, \phi) d\Omega$, $D(\theta, \phi)$ es la sección eficaz,

y también puede escribirse como $d\sigma/d\Omega$. La sección eficaz total es $\sigma = \int D d\Omega$.

Nuestro trabajo es calcular estas cantidades en distintas situaciones.

2) En principio hay que estudiar la evolución temporal de paquetes de ondas, pero como estos se pueden expandir en estados estacionarios, nos enfocamos en los autoestados de $H = \frac{p^2}{2\mu} + V(r)$. Para tiempos muy antes del scattering, tenemos apróx ondas planas $\psi(\vec{r}) \sim e^{ikz}$. Para tiempos muy después, seguimos con ondas planas, pero además está la onda scattereada. $[E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}]$

Lejos, es como una onda esférica que sale, e^{ikr}/r . El factor V_r es para satisfacer cons. de probabilidad, y la ec. de autoestado. Esta amplitud se va a modular por una función que depende de los ángulos, $f(\theta, \phi)$.


$$\Rightarrow \boxed{\psi_k(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikz} + f_k(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}} \quad f_k: \text{amplitud de scattering.}$$

3) Las probabilidades para ψ_k no son normalizables \Rightarrow trabajamos en vez con la corriente de probabilidad, $\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$. Lo que vamos a hacer es comparar \vec{J}_{inc} con \vec{J}_{scat} , \vec{J}_i v.s. \vec{J}_s . $|\vec{J}_i| = \frac{\hbar k}{\mu}$, y para \vec{J}_s ,

(propuesto) $|\vec{J}_s| \approx \frac{\hbar k}{\mu} |f_k(\theta, \phi)|^2 \cdot \frac{1}{r^2}$ despreciando $\mathcal{O}(1/r^3)$.

$$F_i = C \cdot |\vec{J}_i| = C \cdot \frac{\hbar k}{\mu}, \quad \text{y } dn = C \cdot \vec{J}_s \cdot d\vec{S} = C |\vec{J}_s| r^2 d\Omega = C \frac{\hbar k}{\mu} |f_k(\theta, \phi)|^2 d\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{D(\theta, \phi) = |f_k(\theta, \phi)|^2} \Rightarrow \text{Ahora el enfoque teórico es calcular } f_k.$$

[Sufiteza con $\theta \approx 0$] \Leftrightarrow Interferencia entre esférica y plana. ||| 

II) Hay dos posibles supuestos que vamos a implementar sobre $V(\vec{r})$ para poder encontrar f_k . Podemos decir que V es "pequeño", o que está localizado a una región restringida. Comenzamos con la 2^a opción.

1) Comenzamos con el supuesto que V es un pot. central $V(r)$, y que entonces

\vec{L} se conserva $\Rightarrow (E, L^2, L_z)$ son buenos #'s cuánticos, tenemos $\psi_{k\ell m}$.

Idea conceptual: estudiar $\psi_{k\ell m}^{(0)}$ (con $V=0$) primero. Dado que el pot. está localizado, al estar lejos $\psi_{k\ell m}$ con $\psi_{k\ell m}^{(0)}$ se van a parecer! Su diferencia va a ser lo importante.

$$\psi_{k\ell m}(r, \theta, \phi) = R(r) Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad \text{con } u(r) = rR(r) \text{ t.g. } -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u = E u.$$

$$\text{Para } r \text{ muy grande } \frac{d^2 u}{dr^2} \approx -\frac{2\mu E}{\hbar^2} u = k^2 u \Rightarrow u = C e^{ikr} + D e^{-ikr} \Rightarrow R \sim \frac{e^{ikr}}{r},$$

lo que sabíamos antes. Ahora consideramos $\psi_{k\ell m}^{(0)}$ o equivalentemente la zona donde V se puede ignorar. $\Rightarrow \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u = -k^2 u$

La solución general de esta ec. es $u(r) = Arj_l(kr) + Brn_l(kr)$, comb. de funciones de Bessel esféricas. En vez de estas (que son como senos/cosenos) usamos funciones esféricas de Hankel $h_l^{(1)} = j_l + in_l(k)$, $h_l^{(2)} = j_l - in_l$. Para r grande,

$$h_l^{(1)}(kr) \sim e^{ikr}/r \quad (\text{ignoramos } h_l^{(2)} \text{ porque son ondas entrantes})$$

$$\Rightarrow \psi(r, \theta, \phi) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{lm} C_{lm} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) \right\}$$

El potencial es simétrico esféricamente $\Rightarrow \psi$ no depende en $\phi \Rightarrow$ solo tenemos $m=0$.

$$V_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta). \quad C_{l,0} \equiv i^{l+1} k \sqrt{4\pi(2l+1)} a_l$$

$$\Rightarrow \psi(r, \theta) = A \left\{ e^{ikz} + \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) a_l h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos\theta) \right\}$$

Amplitud parcial.

$$\text{Para } r \text{ muy grande, } h_l^{(1)} \approx (-i)^{l+1} e^{ikr}/kr \Rightarrow \psi(r, \theta) \approx A \left(e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right),$$

$$\text{con } f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos\theta). \quad \text{Con esto,}$$

$$D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) a_l^* a_{l'} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta), \quad \text{y } \sigma = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2.$$

Entonces ahora en vez de calcular f , debemos calcular las amplitudes de ondas parciales.

2) Vamos a expresar e^{ikz} de forma similar al otro término. Fórmula de Rayleigh:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^{l(2l+1)} j_l(kr) P_l(\cos\theta) \Rightarrow \psi(r, \theta) = A \sum_{l=0}^{\infty} i^{l(2l+1)} (j_l(kr) + ika_l h_l^{(1)}(kr)) P_l(\cos\theta)$$

$$\underline{\text{Ejemplo:}} \quad V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \right|^2$$

$$\psi(a, \theta) = 0 \Rightarrow a_l = \frac{i}{k} \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)}. \quad \text{Para bajas energías, } ka \ll 1 \text{ (longitud de onda mucho mayor que la zona del potencial), } \left| \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \right|^2 \approx \frac{(ka)^{4l+2}}{(2l+1)^2} \left(\frac{2^l l!}{(2l)!} \right)^4$$

$$\Rightarrow \sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ka)^{4l+2}}{2l+1} \left(\frac{2^l l!}{(2l)!} \right)^4 \approx 4\pi a^2 \quad \text{; (la onda "siente" toda la esfera!)}$$

En general, esta filosofía de ignorar términos de mayor l es bien útil.

(Ver Cohen VIII C) "una partícula en el estado $|\psi_{klm}^{(0)}\rangle$ prácticamente no se ve afectada por lo que ocurre dentro de una esfera centrada en el origen, de radio $b_l(k) = \frac{1}{k} \sqrt{l(l+1)}$. Viene de argumentos sobre $j_l(kr)$ (comportamiento de prob. en r chico).

3) La forma en que ψ se "da vuelta" que hay un potencial se puede caracterizar con un cambio de fase. Esto se encuentra metiendonos a la zona donde V importe, y aplicando cond. de borde. Fundamental: como el momento angular se conserva, cada onda parcial $|\ell_{k_{lm}}\rangle$ se scatterea independiente de las demás, con solo un cambio en su fase (no amplitud por cons. de probabilidad). Para $V=0$,

$$\varphi_{k_{lm}}^{(0)} = A i^{l+1} (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta). \text{ Para } r \text{ grande, } \varphi_{k_{lm}}^{(0)} \approx A \cdot \frac{2l+1}{2ikr} [e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos\theta)$$

La parte con una onda saliente adquiere una fase al agregar el potencial,

$$\varphi_{k_{lm}} \approx A \cdot \frac{2l+1}{2ikr} [e^{i(kr+2\delta_l)} - (-1)^l e^{-ikr}] P_l(\cos\theta). \text{ Entonces ahora analizamos } S_l$$

en vez de a_l . Solo un # en vez de dos, gracias a cons. de \vec{L} . ~~La~~ ~~relacion~~ ~~entre~~ ~~ellos~~ Para relacionar $a_l \leftrightarrow S_l$, volvemos a la expresi3n en t3rminos de a_l para ψ , en la zona con r grande:

$$\varphi_{k_{lm}} \approx A \left\{ \underbrace{\frac{2l+1}{2ikr} (e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr})}_{\text{Parte } j_l} + \underbrace{\frac{2l+1}{r} a_l e^{ikr}}_{\text{Parte } h_l^{(1)}} \right\} P_l(\cos\theta). \text{ Comparando, tenemos}$$

$$\frac{2l+1}{r} a_l e^{ikr} + \frac{2l+1}{2ikr} e^{ikr} = \frac{2l+1}{2ikr} e^{i(kr+2\delta_l)} \Rightarrow a_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \sin\delta_l, \text{ entonces}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta), \quad \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l$$

A) Ejemplo. $V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$

No hay n_1 porque divergen en $r=0$.

$$q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0)$$

$$R_l(r) = \begin{cases} A_l j_l(qr) & r < a \\ B_l j_l(kr) + C_l n_l(kr) & r \geq a \end{cases}$$

Cond. de borde: R_l y R_l' continuas en $r=a$. Derivada log R_l/R tmb.

$$\frac{q j_l'(qa)}{j_l(qa)} = k \cdot \frac{j_l'(ka) + \frac{C_l}{B_l} n_l'(ka)}{j_l(ka) + \frac{C_l}{B_l} n_l(ka)} \Rightarrow (*) - \frac{C_l}{B_l} = \frac{k j_l'(ka) j_l(qa) - q j_l(ka) j_l'(qa)}{k n_l'(ka) j_l(qa) - q n_l(ka) j_l'(qa)}$$

Ahora, un poco de f3sica: Para $r > a$, $kr \gg 1$, $B_l j_l(kr) + C_l n_l(kr) \approx \frac{B_l}{2ikr} [e^{i(kr-l\pi/2)} - e^{-i(kr-l\pi/2)}]$

$-\frac{C_l}{2kr} [e^{i(kr-l\pi/2)} + e^{-i(kr-l\pi/2)}]$. Agrupamos las ondas que entran, y las que salen:

$$= \frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{kr} \left(-\frac{B_l}{2i} - \frac{C_l}{2} \right) + \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{kr} \left(\frac{B_l}{2i} - \frac{C_l}{2} \right). \text{ La fase } 2\delta_l \text{ que definimos tambi3n}$$

se puede entender como una fase δ_l que adquiere la onda que entra, y luego una fase δ_l por la que sale.

A partir de esto, entonces, decimos

$$-e^{2i\delta_l} = \frac{\text{Las que salen}}{\text{Las que entran}} \leftarrow \text{Los coeficientes}$$

$$= -\frac{iB_l + C_l}{iB_l - C_l} = -\frac{1 - iC_l/B_l}{1 + iC_l/B_l} = -\frac{e^{i\delta_l}}{e^{-i\delta_l}} = -\frac{\cos\delta_l + i\sin\delta_l}{\cos\delta_l - i\sin\delta_l} = -\frac{1 + i\tan\delta_l}{1 - i\tan\delta_l}$$

$\Rightarrow \tan\delta_l = -\frac{C_l}{B_l}$, pero esto está en (*)! Si tomamos $ka \ll 1$, obtenemos

$$\tan\delta_l \approx (ka)^{2l+1} \cdot \frac{(j_l(ka) - qa j_l'(ka))}{-(2l+1)j_l(ka) - qa j_l'(ka)} \quad \left[\text{se usó } j_l(\rho) \rightarrow \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}, n_l(\rho) \rightarrow -\frac{(2l-1)!! \rho^{-(l+1)}}{(2l+1)!!} \text{ para } \rho \rightarrow 0 \right]$$

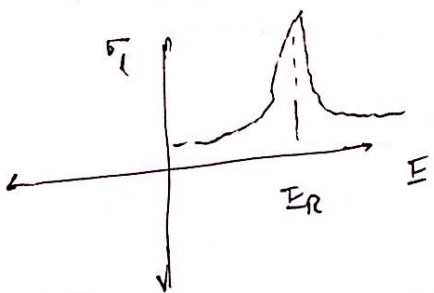
Términos de l bajo dominan. Pero qué pasa si $(2l+1)j_l(ka) + qa j_l'(ka) = 0$?

En grad, $\delta_l = \pi/2$ ahí! Cerca de esos puntos,

$$\tan\delta_l \approx (ka)^{2l+1} \cdot \frac{y}{E - E_r} \Rightarrow \sin^2\delta_l = \frac{1}{1 + \tan^2\delta_l} \text{ lo conocemos.}$$

Para $\delta_l = \pi/2$, scattering es máximo (resonancia)

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l \equiv \sum_l \sigma_l \Rightarrow \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \cdot \frac{y^2 (ka)^{4l+2}}{y^2 (ka)^{4l+2} + (E - E_r)^2}$$



~~Resonancia~~ Fórmula de Breit-Wigner

(comentario aparte: "teorema óptico")

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im}(f(0)).$$

III) EC. Integral y Apróx. de Born.

La ecuación de Schrödinger se puede escribir de forma integral. Veamos esto:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}), \quad U = \frac{2mV}{\hbar^2} \Rightarrow (\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}) = U(\vec{r}) \psi(\vec{r}). \text{ Podemos}$$

escribir la solución a esto:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}' G(\vec{r}, \vec{r}') U(\vec{r}') \psi(\vec{r}'), \quad \text{donde } \psi_0 \text{ satisface } (\nabla^2 + k^2) \psi_0 = 0,$$

y $(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, con G la función de Green: respuesta en \vec{r} a la fuente en \vec{r}' . Si a esta última ec. le tomamos su trans. de Fourier, y hacemos

unas integrales (ver e.g. Griffiths), tenemos $G(\vec{r}, \vec{r}') = A_- G_-(\vec{r}, \vec{r}') + A_+ G_+(\vec{r}, \vec{r}')$, con $G_{\pm}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i k |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$. Tomamos solo G^+ , la onda que sale.

Tenemos entonces $\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} U(\vec{r}') \psi(\vec{r}')$

Si nos paramos lejos (donde tenemos el detector), tenemos $|\vec{r}|$ grande. Además, si suponemos que $U(\vec{r}')$ tiene soporte en una región restringida, tenemos $|\vec{r}-\vec{r}'|$ grande $(r \gg r')$

$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' \approx r^2 [1 - \frac{2\hat{r}\cdot\vec{r}'}{r}] \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - \hat{r}\cdot\vec{r}'$. $\vec{k}_s \equiv k\hat{r}$, $\vec{k}_i \equiv k\hat{z}$.

$\Rightarrow \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{e^{i\vec{k}_s\cdot\vec{r}} e^{-i\vec{k}_s\cdot\vec{r}'}}{r - \hat{r}\cdot\vec{r}'} = \frac{e^{i\vec{k}_s\cdot\vec{r}} e^{-i\vec{k}_s\cdot\vec{r}'}}{r} [1 + \mathcal{O}(\frac{r'}{r})]$. Por el otro lado, para scattering tenemos $\psi_0(\vec{r}) = A e^{ikz}$. (caso con $V=0$)



$\Rightarrow \psi(\vec{r}) = A [e^{ikz} - \frac{e^{i\vec{k}_s\cdot\vec{r}}}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' e^{-i\vec{k}_s\cdot\vec{r}'} U(\vec{r}') \psi(\vec{r}')] = A [e^{ikz} - f(\theta, \phi) \frac{e^{i\vec{k}_s\cdot\vec{r}}}{r}]$

Ondas parciales:

útil para partículas con energías bajas.

Aprox de Born:

útil para potenciales chicos en comparación a energías de partículas.

Si el scattering es débil, $\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + (\text{algo chico})$, entonces a $\mathcal{O}(1)$,

$\psi(\vec{r}) \approx \psi_0(\vec{r}) - \frac{e^{i\vec{k}_s\cdot\vec{r}}}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' U(\vec{r}') e^{-i\vec{k}_s\cdot\vec{r}'} \psi_0(\vec{r}')$. Tomando $\psi_0 = A e^{ikz}$, tenemos

$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' U(\vec{r}') e^{-i\vec{k}_s\cdot\vec{r}'}$

Primera aprox de Born. $\Delta\vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$

En la aux vamos a ver ejemplos.

$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$, $\psi_{\vec{k}} = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' U(\vec{r}') \psi_{\vec{k}}(\vec{r}')$ $\vec{k}_i \rightarrow \vec{k}_s$

IV) Scattering de partículas idénticas.

F. de onda debe ser simétrica/antisimétrica bajo intercambio de partículas. Si estamos en el sistema CM, esto corresponde a hacer $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$.

$u(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{i\vec{k}_s\cdot\vec{r}}}{r}$, $u(\vec{r}(-\vec{r})) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{-ikz} + f(\pi-\theta, \phi+\pi) \frac{e^{i\vec{k}_s\cdot\vec{r}}}{r}$
 $u(\vec{r}) \pm u(-\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (e^{ikz} \pm e^{-ikz}) + \underbrace{[f(\theta, \phi) \pm f(\pi-\theta, \phi+\pi)]}_{\text{onda scatterada}} \frac{e^{i\vec{k}_s\cdot\vec{r}}}{r}$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi) \pm f(\pi-\theta, \phi+\pi)|^2$