Universidad de Chile
Departamento de Física
FI7002 - Mecánica Cuántica II

Auxiliar 10 - Mecánica Cuántica Relativista: ¿Por qué campos?

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Nicolás Valdés

P1. Hay distintas formas de ver que la mecánica cuántica de partículas no se mezcla bien con la relatividad especial. Una de ellas es la siguiente: calcule la amplitud para una partícula (masa m) de ir del punto $\mathbf{x} = 0$ a otro punto $\mathbf{y}$. Muestre que no es nula aún cuando los puntos tienen separación tipo espacio.

P2. La forma de arreglar el problema anterior es usar campos cuánticos para formar el Hamiltoniano. Un campo cuántico escalar es de la forma $\phi(x) = \alpha\phi^+(x) + \beta\phi^-(x)$, donde

$$\phi^+ = \int d^3p \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} a_p e^{ip_\mu x^\mu}, \quad \phi^- = \int d^3p \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} a_p^\dagger e^{-ip_\mu x^\mu} = \left(\phi^+\right)^\dagger. \tag{1}$$

(a) Muestre que ϕ satisface la ecuación de Klein-Gordon (ec. relativista de Schrödinger). Propuesto: encuentre la densidad Lagrangiana con la cual se puede llegar a la ecuación de Klein-Gordon.

(b) Para satisfacer causalidad y arreglar el problema de la P1, se requiere que $[\phi(x), \phi(y)] = [\phi(x), \phi^\dagger(y)] = 0$ cuando $x^\mu - y^\mu$ es tipo espacio.[1] Muestre que esto implica que ϕ debe ser Hermítico. Recuerde que

$$\int_0^\infty \frac{udu}{\sqrt{u^2+1}} \sin(\gamma u) = K_1(\gamma), \tag{2}$$

donde K_1 es una función de Hankel de primera especie, que es par cuando $\gamma \in \mathbb{R}$.

(c) Si tuviéramos una partícula fermiónica, se tendría que satisfacer $\{\phi(x), \phi(y)\} = \{\phi(x), \phi^\dagger(y)\} = 0$ (anti-conmutación) para $x^\mu - y^\mu$ tipo espacio. Muestre, entonces, que si una partícula tiene spin 0 debe ser un boson.

[1] Mejor dicho, para que la matriz $\mathcal{S}$ sea invariante bajo transformaciones de Lorentz.