Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 1 Álgebra Lineal
29 de Octubre de 2018

Clase Auxiliar # 6: Independencia Lineal, Bases y Dimensión

Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliares: María Eugenia Martínez y Nicolás Zalduendo

P1. Sean E, F e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T : E \longrightarrow F$ una función que satisface:

(i) $T(0_E) = 0_F$

(ii) $\forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha T(x) = T(\alpha x)$

(iii) $\forall x, y \in E, T(x + y) = T(x) + T(y)$

Considere que además T cumple:

$$\forall x \in E,\ T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Muestre que si $\{u_1, \cdots, u_n\} \subseteq E$ es *l.i.*, entonces $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\} \subseteq F$ es *l.i.*

P2. **(a)** Muestre que en $\mathbb{R}^n$, $n + 1$ vectores son siempre linealmente dependientes. Concluya que si $m > n$, entonces el conjunto $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es linealmente dependiente.

(b) Justifique si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o dependientes:

(i) Las columnas de una matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible en el espacio $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

(ii) Tres puntos colineales en $\mathbb{R}^3$ en el espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

(iii) $\{\sin^2(x), 2x, e^x, x + 1, \cos^2(x)\}$ en el espacio de las funciones a valores reales con las operaciones usuales.

(iv) $\left\{ \sum_{i=0}^{k} x^i \in \mathcal{P}_n : k \leq n \right\}$ en el espacio de los polinomios de grado a lo más n ($\mathcal{P}_n$) con las operaciones usuales.

P3. Sea E el s.e.v de $\mathbb{R}^4$ generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ Encuentre una base de E y su dimensión.

P4. En el siguiente problema $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ denota el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3. Considere $U = \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(1) = p'(1) = 0\}$.

(a) Encuentre una base de U y su dimensión.

(b) Considere ahora el subespacio vectorial $W = \{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p''(0) = 0\}$

(i) Encuentre una base de W y su dimensión.

(ii) Encuentre una base de $U \cap W$ y su dimensión.