Pauta Aux #1 26/09

P1) Analizamos la convergencia por componentes:
En primer lugar notamos que, como α puede tomar cualquier valor, la tercera coordenada es candidata a diverger.
(Intuición: Si α es muy grande, $\frac{1}{b_n^\alpha} \longrightarrow 0$ "muy rápido")
Estudiemos entonces

$$X_n^3 = \frac{f(b_n)^2 - f(0)}{b_n^\alpha} = \frac{(f(b_n)+f(0))(f(b_n)-f(0))}{b_n^\alpha}$$

$$= \underbrace{(f(b_n)+f(0))}_{c_n} \cdot \underbrace{\frac{(f(b_n)-f(0))}{b_n}}_{d_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_n^{\alpha-1}}}_{e_n}$$

•) Como f es derivable, en particular es continua

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(0) \Rightarrow \boxed{c_n \longrightarrow 2f(0)}$$

•) Recordamos que como f es derivable,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \Rightarrow \boxed{d_n \longrightarrow f'(0)}$$

•) Como $(b_n)_n$ es nula,

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \alpha-1>0 \\ 1 & , \text{ si } \alpha-1=0 \\ \infty & , \text{ si } \alpha-1<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} e_n = \begin{cases} \infty & , \text{ si } \alpha>1 \\ 1 & , \text{ si } \alpha=1 \\ 0 & , \text{ si } \alpha<1 \end{cases}}$$

Ahora, para asegurar la convergencia de $(x^3{}_n)_n$ a la multiplicación de los límites, es necesario que las tres sucesiones sean convergentes, lo cual sucede solo si $\alpha \leq 1$.

Si $\alpha > 1$, recordemos de Intro al cálculo que si $y_n \to y \neq 0$ y $z_n \to \infty$, entonces $y_n z_n$ no converge

Luego, como $c_n d_n \to 2f(0)f'(0) \neq 0$ por hipótesis, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} x^3{}_n = \begin{cases} \infty & , \text{ si } \alpha>1 \\ 2f(0)f'(0) & , \text{ si } \alpha=1 \\ 0 & , \text{ si } \alpha<1 \end{cases}$$

Veamos las otras coordenadas:

$$x^1_n = \frac{a_n(|a_n|-|b_n|)\,b_n}{(a_n^2+b_n^2)(a_n-b_n)}$$

A diferencia de la anterior, ~~como~~ acá nos enfrentamos a dos sucesiones que no sabemos relacionar $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=?\right)$, por lo que nos sería útil encontrar un candidato a límite x^1 y probar que $|x^1_n - x^1| \longrightarrow 0$.

Como $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son nulas y no hay ninguna función extra un candidato natural es 0

$\left(\text{Intuición: orden/velocidad } x^1_n \approx \frac{a_n^3 b_n \text{ ó } a_n^2 b_n \sim 4}{a_n^3 \text{ ó } a_n^2 b_n \text{ ó etc} \sim 3}\right)$

Veamos si 0 es el límite

$$|x^1_n - 0| = \frac{|a_n|^2\,||a_n|-|b_n||\,|b_n|}{(a_n^2+b_n^2)\,|a_n-b_n|}$$

$$\begin{pmatrix}\text{desigualdad}\\ \text{triangular}\\ \text{inversa}\end{pmatrix} \leq \frac{|a_n|^2\,\cancel{|a_n-b_n|}\,|b_n|}{(a_n^2+b_n^2)\,\cancel{|a_n-b_n|}}$$

$$\begin{pmatrix}b_n^2 \geq 0\\ a_n^2 \geq 0\end{pmatrix} \leq \frac{\cancel{|a_n|^2}\cdot|b_n|}{\cancel{|a_n|^2}} \longrightarrow 0$$

donde usamos que $(a_n^2+b_n^2) \geq a_n^2 = |a_n|^2$

Nota: En general, $|y+z| \geq |z|$ cuando $y \cdot z \geq 0$ (tienen igual signo)

Para la segunda coordenada hay un coseno involucrado, pero recordemos que $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$, por lo que el 0 es nuevamente ~~candidato~~. Una buena opción de límite

$$|x^2_n| \leq \frac{|a_n| |\cos(b_n)-1|}{(a_n^2+b_n^2)}$$

Recordemos que como $0 \leq (a_n \pm b_n)^2$

$$\Rightarrow 0 \leq a_n^2 \pm 2a_nb_n + b_n^2 \Rightarrow a_n^2 + b_n^2 \geq 2|a_n||b_n|$$

Luego,

$$|x^2_n| \leq \frac{\cancel{|a_n|} |\cos(b_n)-1|}{2\cancel{|a_n|}|b_n|}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\cos(b_n)-1}{|b_n|}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

Finalmente,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \begin{cases} (0,0,0) & , \text{ si } \alpha < 1 \\ (0,0,2f(0)f'(0)) & , \text{ si } \alpha = 1 \end{cases}$$

y no existe cuando $\alpha > 1$.

P2 | pdq: $\|\cdot\|: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es norma en $\mathbb{R}^d$

$$x \longmapsto \|x\| = \|T(x)\|_E$$

(0) (Positividad) Para cada $x \in \mathbb{R}^d$,

$\|x\| = \|T(x)\|_E \geq 0$, pues $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}_+$

Recuerdo: $T: \mathbb{R}^d \to E$ lineal cumple

•) $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(a) $\|x\| = 0 \iff x = 0 \in \mathbb{R}^d$

$\Leftarrow$) $\|0\| = \|T(0)\|_E \underset{T \text{ lineal}}{=} \|0\|_E \underset{(i)}{=} 0$

$\Rightarrow$) $\|T(x)\|_E = 0 \underset{(i)}{\iff} T(x) = 0 \underset{T \text{ biyectiva (inyectiva)}}{\iff} x = 0$

(b) Sea $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$. pdq: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

$\|\lambda x\| = \|T(\lambda x)\|_E \underset{T \text{ lineal}}{=} \|\lambda T(x)\|_E \underset{(ii)}{=} |\lambda| \|T(x)\|_E = |\lambda| \|x\|$ ✓

(c) Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$. pdq: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x+y\| = \|T(x+y)\| \underset{T \text{ lineal}}{=} \|T(x) + T(y)\| \underset{(iii)}{\leq} \underbrace{\|T(x)\|}_{\|x\|} + \underbrace{\|T(y)\|}_{\|y\|}$

Luego, $\|\cdot\|$ es norma en $\mathbb{R}^d$.

P3 | (a) pdq: $\|\cdot\|: \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ es norma en $\mathcal{P}_n$

$$p \longmapsto \int_0^1 |p'(t)|dt + |p(0)|$$

(o) $\|p\| = \underbrace{\int_0^1 |p'(t)|dt}_{\geq 0} + \underbrace{|p(0)|}_{\geq 0} \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_n$

pues la integral de una función positiva es positiva.

(i) $\|p\| = 0 \iff p \equiv 0$

$\Leftarrow$ | Si p es el polinomio 0 ($p(t) = 0, \forall t$), tenemos que su derivada también ($p'(t) = 0, \forall t$), y como la integral de cero es cero, $\|p\| = 0$

$\left(\int_0^1 0 dt = c\Big|_{t=0}^{1} = c - c = 0\right)$

$\Rightarrow$ | Si $0 = \|p\| = \underbrace{\int_0^1 |p'(t)|dt}_{\geq 0} + \underbrace{|p(0)|}_{\geq 0}$

Como ambos sumandos son positivos, tienen que ser 0

Escribamos $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k t^k$

•) Como $|p(0)| = 0$, $a_0 = 0$

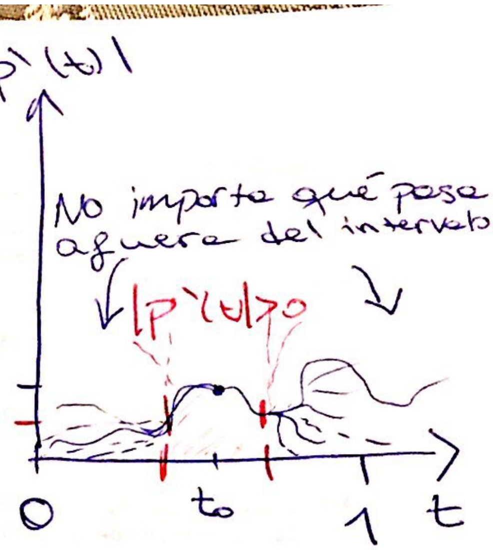
•) ~~Si probamos que $|p'(t)|$~~

Si asumimos por contradicción que p no es el polinomio cero, como $a_0 = 0$, tampoco puede ser constante, es decir, es de grado mayor a 1

$\Rightarrow p'$ tampoco es cero

Pero también tenemos que

$$\int_0^1 |p'(t)|\,dt = 0$$



lo cual es una contradicción, pues si $\exists\, t_0 \in [0,1]$ t.q. $|p'(t_0)|>0$, como los polinomios son <u>continuos</u> va a existir un <u>intervalo</u> donde $|p'(t)|$ sea positiva, y el "área bajo la curva" no podría ser cero. (demostración al final)

Luego, p tiene que ser polinomio cero.

(iii) sea $p \in P_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, pdq: $\|\lambda p\| = |\lambda|\,\|p\|$

$$\|\lambda p\| = \int_0^1 |(\lambda p)'(t)|\,dt + |(\lambda p)(0)|$$

$$= \int_0^1 |\lambda p'(t)|\,dt + |\lambda p(0)|$$

$$= |\lambda| \underbrace{\left(\int_0^1 |\cancel{\lambda} p'(t)|\,dt + |p(0)| \right)}_{\|p\|} \checkmark$$

donde utilizamos que tanto la derivada como la integral son lineales (sacan constantes) y que $|\lambda p'(t)| = |\lambda|\,|p'(t)|$, $\forall t$ ($|\cdot|$ es norma).

(iii) Sean $p, q \in \mathcal{P}_n$. pdq: $\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\|$

$$\|p+q\| = \int_0^1 |(p+q)'(t)|\,dt + |(p+q)(0)|$$

$$= \int_0^1 |p'(t) + q'(t)|\,dt + |p(0) + q(0)|$$

$$\leq \int_0^1 |p'(t)| + |q'(t)|\,dt + |p(0)| + |q(0)|$$

$$= \underbrace{\int_0^1 |p'(t)|\,dt + |p(0)|}_{\|p\|} + \underbrace{\int_0^1 |q'(t)|\,dt + |q(0)|}_{\|q\|}$$

donde usamos nuevamente la linealidad de la integral y derivada, además de la desigualdad triangular de $|\cdot|$.

Luego, $\|\cdot\|$ es norma en $\mathcal{P}_n$.

(b) pdq: $\exists L \in \mathbb{R} : \|p\| \leq L \cdot \max_{i=0,\dots,n} |a_i|$, $\forall p \in \mathcal{P}_n$

Acotemos directamente usando $p'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot t^{k-1}$

$$\|p\| = \int_0^1 |p'(t)|\,dt + |p(0)|$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot t^{k-1} \right| dt + |a_0|$$

$$\leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} |a_k \cdot \underbrace{k \cdot t^{k-1}}_{\geq 0}|\,dt + |a_0|$$

lo cual viene de ocupar la desigualdad triangular de $|\cdot|$ n veces. Sea $M = \max_{i=0,\dots,n} |a_i|$ tenemos que

$$\|p\| \leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} M \cdot k \cdot t^{k-1}\,dt + M$$

$$= M \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 k t^{k-1}\,dt + M \quad \left(\text{Se puede siempre que la suma sea finita}\right)$$

$$= M \left(\sum_{k=1}^{n} (t^k)\Big|_{t=0}^{1} + 1 \right)$$

$$= M \left(\sum_{k=1}^{n} 1 + 1 \right) = M \underbrace{(n+1)}_{=:L}$$

Tomando $L = n+1$ tenemos lo pedido.

Scanned with CamScanner

(c) Recordemos que $p \in \underbrace{\langle \{p_0\} \rangle}_{M} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : p = \lambda p_0$

$\Rightarrow p \in M \cap B_{\|\cdot\|}(0,1) \iff p = \lambda p_0 \wedge \|p\| < 1, \; \lambda \in \mathbb{R}$

$\iff p = \lambda p_0 \wedge \|\lambda p_0\| < 1$

$\iff p = \lambda p_0 \wedge |\lambda| \, \|p_0\| < 1$

$\iff p = \lambda p_0$ con $|\lambda| < \dfrac{1}{\|p_0\|}$

Calculemos $\|p_0\|$, $\left(p_0(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \right)$

$$\Rightarrow \|p_0\| = \int_0^1 \Big| \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k t^{k-1}}_{\geq 0} \Big| dt + 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 k t^{k-1} dt + 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 1 + 1 = n+1$$

Luego, $p \in M \cap B_{\|\cdot\|}(0,1) \iff p = \lambda p_0$ con $|\lambda| < \dfrac{1}{n+1}$

es decir, $M \cap B_{\|\cdot\|}(0,1) = \left\{ \lambda p_0 : |\lambda| < \dfrac{1}{n+1} \right\}$

(demostración pendiente)

Probemos formalmente que si $p \neq 0$, entonces

$$\int_0^1 |p'(t)|dt > 0.$$

dem: Como $p \neq 0$, tomemos $\varepsilon > 0$ t.q.

$|p'(t_0)| > \varepsilon$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$.

Notemos que la función $|p'(\cdot)|$ es continua por composición. Entonces podemos tomar $\delta > 0$ t.q.

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \big| |p'(t_0)| - |p'(t)| \big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En particular $|p'(t_0)| - |p'(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow |p'(t)| > |p'(t_0)| - \frac{\varepsilon}{2} > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, $\displaystyle\int_0^1 |p'(t)|dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |p'(t)|dt > \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \frac{\varepsilon}{2}\, dt = \frac{\varepsilon}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\delta > 0$

∎