Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
03 de Octubre de 2018

Pauta P1 y P3 Auxiliar #2

Profesor: David Salas.
Auxiliar: Matías Romero.

P1. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ .Demuestre las siguientes propiedades:

- **(a)** $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B)$
- **(b)** $\text{Adh}(A \cap B) \subseteq \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$
- **(c)** $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$
- **(d)** $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$
- **(e)** $\text{Int}(A) = \phi$, si A es numerable.

Demostración: En primer lugar, notemos que trabajando con identidades de conjuntos y ocupando que $\text{Int}(D)^c = \text{Adh}(D^c)$, las propiedades (a) y (b) son equivalentes, al igual que (c) y (d).

En efecto, si sabemos que (a) y (b) son ciertas:

$$\begin{aligned}
\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cup B) &\iff \text{Int}(A \cup B)^c \subseteq (\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B))^c \\
&\iff \text{Adh}((A \cup B)^c) \subseteq \text{Int}(A)^c \cap \text{Int}(B)^c \\
&\iff \text{Adh}(A^c \cap B^c) \subseteq \text{Adh}(A^c) \cap \text{Adh}(B^c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = &\iff \text{Int}(A \cap B)^c = (\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B))^c \\
&\iff \text{Adh}((A \cap B)^c) = \text{Int}(A)^c \cup \text{Int}(B)^c \\
&\iff \text{Adh}(A^c \cup B^c) = \text{Adh}(A^c) \cup \text{Adh}(B^c)
\end{aligned}$$

con lo que llamando $\tilde{A} = A^c$, $\tilde{B} = B^c$ (no es necesario, pero queda más claro), recuperamos (b) y (d). Luego, basta con que probemos solamente (b), (c) y (e).

(b): Por la monotonía de la adherencia, como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, tenemos que

$$\text{Adh}(A \cap B) \subseteq \text{Adh}(A) \text{ y } \text{Adh}(A \cap B) \subseteq \text{Adh}(B) \Longrightarrow \text{Adh}(A \cap B) \subseteq \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B).$$

(c): Por la monotonía del interior, como $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, tenemos que

$$\text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \text{ y } \text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(B) \Longrightarrow \text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B).$$

Para la otra inclusión utilizaremos la definición:

Sea $x \in \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$, queremos probar que $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A \cap B$.

Por hipótesis, como $x \in A \cap B \subseteq A$, $\exists r_A > 0$ tal que $B(x, r_A) \subseteq A$, y de manera análoga, $\exists r_B > 0$ tal que $B(x, r_B) \subseteq B$. Luego, tomando $r := \text{mín}\{r_A, r_B\}$, tenemos que

$$B(x, r) \subseteq B(x, r_A) \subseteq A \text{ y } B(x, r) \subseteq B(x, r_B) \subseteq B \Longrightarrow B(x, r) \subseteq A \cap B.$$

Con lo cual concluimos que $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$ y obtenemos la igualdad.

(e): Razonando por contradicción, si $\text{Int}(A) \neq \phi$ podemos tomar un punto $x \in A$ y un radio $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A$. Probaremos ahora que una bola tiene cardinalidad infinita no numerable:

En efecto, $\forall\, s \in (0,r)$ consideremos $\lambda_s = (\frac{s}{\|x\|} + 1) \in \mathbb{R}$, entonces

$$\|\lambda_s x - x\| = |\lambda_s - 1|\|x\| = \frac{s}{\|x\|}\|x\| < r$$

.

Es decir, $\lambda_s x \in B(x,r)$. Luego, para cada elemento en $(0,r)$ hay uno en $B(x,r)$ (esto es una inyección de $(0,r)$ en $B(x,r)$), y como $(0,r)$ tiene no numerables puntos, la bola también, por lo que no podría estar contenida en A numerable... Contradicción!

Concluimos entonces que $\text{Int}(A) = \phi$

P2. Calcule formalmente interior, adherencia y frontera de los siguientes conjuntos y determine si son cerrados o abiertos.

(a) $A_1 := \{\, (\frac{1}{k}, (-1)^k) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{N}\,\}$

(b) $A_2 := \{\, (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 \in \mathbb{I}\}$, con $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto de los irracionales.

(c) $A_3 := \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in [-1,1]\,\}$

Demostración: Solo probaremos (a) y (c), pues (b) requiere tener conocimientos sobre densidad de tanto racionales como irracionales en los reales.

(a): Notando que A_1 es numerable (está indexado por elementos en $\mathbb{N}$), tenemos que $\text{Int}(A_1) = \phi$ por P1(e).

Separando los naturales en pares e impares podemos escribir

$$A_1 = \underbrace{\{\, (\frac{1}{2k}, (-1)^k) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{N}\,\}}_{B} \cup \underbrace{\{\, (\frac{1}{2k+1}, (-1)^k) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{N}\,\}}_{C}$$

y por P1(a) $\text{Adh}(A_1) = \text{Adh}(B) \cup \text{Adh}(C)$. Tanto B y C son conjuntos definidos por sucesiones en $\mathbb{R}^2$ convergentes a $(0,1)$ y $(0,-1)$ respectivamente, pero estos puntos no están en el conjunto. Luego, nuestros candidatos a adherencia son

$$\text{Adh}(B) = B \cup \{(0,1)\} \text{ y } \text{Adh}(C) = C \cup \{(0,-1)\}$$

Solo probaremos esto B, pues para C es análogo.

($\supseteq$) Como $B \subseteq \text{Adh}(B)$, resta probar que $(0,1) \in \text{Adh}(B)$.

En efecto, tomando para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (\dfrac{1}{2n}, 1) \in B$, es claro que $x_n \to (0,1)$.

($\subseteq$) Veamos que $(B \cup \{(0,1)\})^c \subseteq (\text{Adh}(B))^c = \text{Int}(B^c)$. Para esto, tomemos $x \in B^c \cap \{(0,1)\}^c$ arbitrario, es decir $x \neq (0,1)$ y $\forall\, k \in \mathbb{N}, x \neq (\dfrac{1}{2k}, 1)$, y probemos que en cualquier caso podemos formar una bola que esté contenida en B^c.

Si $x = (x_1, x_2)$ con $x_2 \neq 1$, sin pérdida de generalidad consideramos $x_2 > 1$ (el otro caso es análogo), y podemos definir $r := \dfrac{x_2 - 1}{2} > 0$. Con esto, para $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x,r)$ cualquiera, tendremos que

$$r > \|x - y\|_\infty \geq |x_2 - y_2| \geq x_2 - y_2 \Longrightarrow y_2 > x_2 - r = x_2 - \frac{x_2 - 1}{2} = \frac{x_2 + 1}{2} > 1$$

Luego, como todos los puntos en B tienen segunda coordenada exactamente 1, $y \notin B$, con lo cual concluimos que $B_{\|\cdot\|_\infty}(x,r) \subseteq B^c$ y $x \in \text{Int}(B^c)$.

Si $x_2 = 1$, pero $x_1 < 0$ se puede utilizar un argumento similar usando $r = \dfrac{-x_1}{2}$, y lo mismo para $x_1 > \dfrac{1}{2}$ con $r = \dfrac{2x_1 - 1}{2}$.

Como último caso consideramos $x_2 = 1$ y $x_1 \in [0, 1/2] \backslash \{\frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}\}$, es decir, x_1 tiene que estar estrictamente entre los puntos de la sucesión, esto es, que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_1 \in (\frac{1}{2(k+1)}, \frac{1}{2k}) = \mathrm{Int}(\frac{1}{2(k+1)}, \frac{1}{2k}) \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \subseteq (\frac{1}{2(k+1)}, \frac{1}{2k})$$

donde la implicancia viene de la definición de interior (o de abierto) aplicada al intervalo en $\mathbb{R}$. Además, para cada $y = (y_1, y_2)$ tal que $y_1 \in (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ se tendrá que $y \notin B$, pues la primera coordenada seguirá estrictamente entre los puntos de la sucesión. En particular $B(x, \varepsilon) \subseteq B^c$, con lo que en este caso también $x \in B^c$ y $\mathrm{Adh}(B) = B \cup \{(0, 1)\}$. Concluimos entonces que $\mathrm{Adh}(A_1) = A_1 \cup \{(0, 1)\} \cup \{(0, -1)\} = \mathrm{Fr}(A_1)$ y, como el conjunto no coincide ni con su interior ni con su adherencia, no puede ser cerrado ni abierto.

(a): Notamos que

$$\begin{aligned} A_3 &= \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i \in [-1, 1],\, \forall\, i = 1, 2, 3 \,\} \\ &= \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_i| \leq 1,\, \forall\, i = 1, 2, 3 \,\} \\ &= \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \max_{i=1,2,3} |x_i| \leq 1 \,\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \leq 1 \,\} \\ &= \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1) \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos directamente que $\mathrm{Adh}(A_3) = A_3$ (la bola cerrada es cerrada).

Veremos ahora que $\mathrm{Int}(A_3) = B_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1)$ (en adelante se omitirá la norma).

($\supseteq$) Queda propuesto (sale del hecho que la bola abierta es abierta).

($\subseteq$) Sea $x \in \mathrm{Int}(A_3)$, es decir, $\exists\, r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A_3 = \bar{B}(0, 1)$. Tenemos que demostrar que $x \in B(0, 1)$.

Tomemos $y = tx$ con $t > 1$, entonces

$$y \in B(x, r) \Longleftrightarrow \|y - x\| < r \Longleftrightarrow |t - 1|\|x\| < r \Longleftrightarrow t - 1 < \frac{r}{\|x\|} \Longleftrightarrow t < 1 + \frac{r}{\|x\|}$$

Luego, considerando $t \in (1, 1 + \frac{r}{\|x\|})$ y usando la hipótesis deducimos que

$$tx \in B(x, r) \underbrace{\Longrightarrow}_{B(x,r) \subseteq \bar{B}(0,1)} tx \in \bar{B}(0, 1) \Longleftrightarrow \|tx\| \leq 1 \Longleftrightarrow \|x\| \leq \frac{1}{t} < 1 \Longrightarrow x \in B(0, 1)$$

con lo cual concluye la demostración.

Finalmente notamos que $\mathrm{Fr}(A_3) = \{\, x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty = 1 \,\}$ la esfera unitaria.