Notación indicial (o tensorial) para el cálculo vectorial.

Prop 1 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$

dem

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} b_1 & & c_1 \\ & \text{etc} & \\ b_2 & \vdots & c_2 \end{matrix}$$

con esto ...

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_2 [b_1 c_2 - b_2 c_1] - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ a_3 [b_2 c_3 - b_3 c_2] - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ a_1 [b_3 c_1 - b_1 c_3] - a_2 (b_2 c_3 - b_3 c_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 (a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_1 c_1) - c_1 (a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 b_1) \\ b_2 (\quad \dots \quad) - c_2 (\quad \dots \quad) \\ b_3 (\quad \dots \quad) - c_3 (\quad \dots \quad) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \; \vec{a} \cdot \vec{c} - c_1 \; \vec{a} \cdot \vec{b} \\ b_2 \; \vec{a} \cdot \vec{c} - c_2 \; \vec{a} \cdot \vec{b} \\ b_3 \; \vec{a} \cdot \vec{c} - c_3 \; \vec{a} \cdot \vec{b} \end{pmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$$

//

factorizan b_i y c_i en la fila i
+ ni quita ni pone para completar el producto interno.

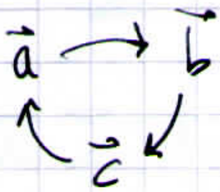
<u>Prop 2</u> : $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

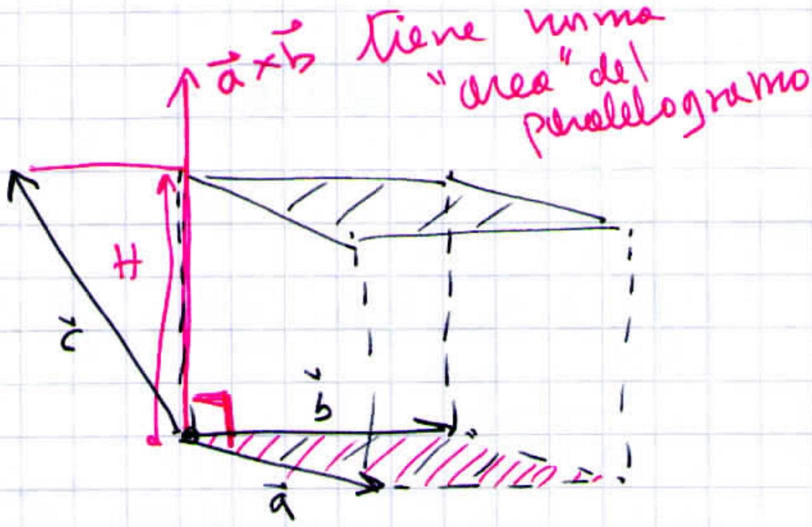
<u>dem</u> Escribir y factorizar con cuidado!!

$$\left\{\begin{array}{l} (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, c_1 \\ + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, c_2 \\ + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, c_3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) \\ + a_2 (\text{ etc.. }) \\ + a_3 (\text{ etc.. }) \end{array}\right\}$$

$\|$

Esto define un producto "ternario" que es invariante por permutaciones cíclicas de sus arg.





$H = \vec{c} \cdot$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$= \pm$ volumen de la caja de aristas $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$= H \cdot \underbrace{\text{área del paralelogramo}}_{=\text{ área base}}$

Notación $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}] \equiv (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

δ_{ij} y el producto punto

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3$$

elemento ij de la matriz identidad

Notar que:

$$\left.\begin{aligned} \sum_i a_i \delta_{i1} &= a_1 \\ \sum_i a_i \delta_{i2} &= a_2 \\ \sum a_i \delta_{i3} &= a_3 \end{aligned}\right\}$$

en resumen:

$$\sum_i a_i \delta_{ij} = a_j$$

Prop

$$\sum_i \sum_j \delta_{ij} a_i b_j = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

dem

$$\sum_i \sum_j \delta_{ij} a_i b_j = \sum_i a_i \Big(\underbrace{\sum_j \delta_{ij} b_j}_{= b_i} \Big)$$

$$= \sum_i a_i b_i \qquad //$$

nota Se entiende que las sumatorias van entre 1 y 3.

Producto cruz y ε_{ijk} (tensor de Levi-Civita)

Sean $\vec{a} = \sum a_i \hat{e}_i$ $\vec{b} = \sum b_j \hat{e}_j$

Entonces

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_i \sum_j a_i b_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j$$

la componente k-esima

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_i \sum_j a_i b_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j)_k$$

$$= \sum_i \sum_j a_i b_j \underbrace{(\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k}_{[\hat{e}_i ; \hat{e}_j ; \hat{e}_k]}$$

aqui aparece el producto "ternario" que corresponde al volumen con signo, de la caja de lados $\hat{e}_i$, $\hat{e}_j$, $\hat{e}_k$

Es facil comprobar que si se repite un indice ($i=j$ o $i=k$ o $j=k$), este producto es nulo

Def $\varepsilon_{ijk} = (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k \in \{0, 1, -1\}$

Asi $(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ijk} a_i b_j$ (*)

Solo 6 coeficientes son no nulos

$1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312}$

$-1 = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213}$

Con este simbolo a tres indices tenemos

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, \hat{e}_k$$ ver (*)

Lo que nos permite escribir el producto cruz en forma compacta.

Nota Al usar esta notación con δ_{ij} y ε_{ijk} se observa que cada vez que un indice se repite en 2 factores, se esta sumando sobre ese indice.

La "convención de Einstein" para indices repetidos hace de esto una simplificación de la notación. Si un indice aparece repetido, se entiende que se debe sumar sobre el indice ... Y NO SE INDICA LA SUMATORIA. La suma esta, pero no se escribe.

Ej $\qquad \delta_{ij} a_i = \sum_i \delta_{ij} a_i = a_j$

Desde aquí, seguiré escribiendo las sumatorias para evitar confusiones.

Notemos que un vector $\vec{v}$ se escribe

$$\vec{v} = \sum_k v_k \hat{e}_k = \sum_k (\vec{v} \cdot \hat{e}_k) \hat{e}_k$$

Y en general, si $\{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ se prueba (fácil)

Teo $\vec{v} = \sum (\vec{v} \cdot \hat{w}_j) \hat{w}_j$

Llamaremos a este teorema como Teorema de Fourier

La propiedad fundamental de ε_{ijk} es ser antisimétrico. Si cambio la posición de 2 índices, cambia el signo:

Por ej $\varepsilon_{ijk} = - \varepsilon_{jik}$

Y la propiedad que permite probar varias identidades es

Teo $\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$

dem   notar que

$$\varepsilon_{ijk} = (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k = (\hat{e}_i \times \hat{e}_j)_k$$

luego

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{pqk} = \sum_k (\hat{e}_i \times \hat{e}_j)_k\, (\hat{e}_p \times \hat{e}_q)_k$$

$$= (\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot (\hat{e}_p \times \hat{e}_q)$$

$$= [(e_p \times e_q) \times \hat{e}_i] \cdot \hat{e}_j \quad \text{(Prop 2)}$$

$$= -[\hat{e}_i \times (\hat{e}_p \times \hat{e}_q)] \cdot \hat{e}_j \quad (\times \text{ antisim.})$$

$$= -[(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_q)\, \hat{e}_p - (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_p)\, \hat{e}_q] \cdot \hat{e}_j \quad \text{(Prop 1)}$$

$$= -[\delta_{iq}\, \hat{e}_p - \delta_{ip}\, \hat{e}_q] \cdot \hat{e}_j$$

$$= \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} \quad //$$

nota se utiliza que $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$

Ej: 1) Usar este resultado para demostrar "de vuelta" que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

2) Probar que $\sum_p \sum_q \varepsilon_{ipq}\, \varepsilon_{jpq} = 2\delta_{ij}$

3) Probar que $\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ijk} = 6$