Auxiliar 2

P1 Verifique que $g(x) = \dfrac{H(x)\,\text{sen}(\omega x)}{\omega} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}),\ \omega \in \mathbb{R}$

es solución, en el sentido de las distribuciones, de la EDO

$$\left(\frac{d^2}{dx} + \omega^2\right) g = \delta.$$

Hay que ver que $\forall\, \varphi \in D(\mathbb{R})$:

$$\left(\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega\right) g\right)[\varphi] = \delta_0[\varphi] = \varphi(0).$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} g\right)[\varphi] = (-1)^2 \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \varphi''(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(x)\,\text{sen}(\omega x)}{\omega}\, \varphi''(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} \text{sen}(\omega x)\, \varphi''(x)\, dx \underset{(IPP)}{=} -\frac{1}{\omega} \int_0 (\text{sen}(\omega x))' \varphi'(x) dx$$

$$+ \underbrace{\cancel{\text{sen}(\omega x) \varphi'(x) \Big|_0^{\infty}}}_{\substack{\text{sop}(\varphi') \subset \text{sop}(\varphi) \\ \Rightarrow \varphi' \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}) \\ \text{y } \text{sen}(0) = 0}}$$

$$= -\int_0^{\infty} \cos(\omega x)\, \varphi'(x)$$

$\underset{(IPP)}{=}$ $- \cos(\omega x)\varphi(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (\cos(\omega x))' \varphi(x)\, dx$

$= + \varphi(0) - \omega \int_0^\infty \operatorname{sen}(\omega x)\varphi(x)\, dx$

$\downarrow$

$\cos(0) = 1$

$= \varphi(0) - \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{H(x)\operatorname{sen}(\omega x)}{\omega} \varphi(x)\, dx$

$= \delta_0[\varphi] - \omega^2 g[\varphi].$

P2) Regla de la cadena para derivadas débiles.

(a). Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ con f' acotada. Sea Ω abierto de $\mathbb{R}^n$ (acotado) y $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\partial_i f(u) = f'(u)\, \partial_i u.$$

Dem:

- Como f' es acotado ($f' \in L^\infty(\mathbb{R})$) luego, $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$:

$$|f(t) - f(s)| \leq |t - s|\,|f'(y)| \leq |t - s|\, M \quad (*_1)$$

$\downarrow$ para algún y entre t y s $\quad M = \|f\|_\infty$

(ie), f es globalmente Lipschitz.

- Como $C^\infty \cap W^{1,p}(\Omega)$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$, $\exists \{u_m\} \subset C^\infty \cap W^{1,p}$ tal que

$u_m \longrightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ $(*_2)$

y $\partial_i u_m \longrightarrow \partial_i u$ en $L^p(\Omega)$, $i = 1, \dots, d$ $(*_3)$

En particular, salvo subsubsucesión, $u_m \longrightarrow u$ ctp
y $\partial_i u_m \longrightarrow \partial_i u$ ctp $(*_4)$

(asumimos que estamos en este caso porq vamos a necesitar convergencia puntual)

$\Rightarrow f \circ u_m \in C^1 \cap L^p(\Omega)$ ya que, como f es continua,

$$|f(t)| \leq |f'(t)|\,|t| + |f(0)| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |f(u(x))|^p \leq \left(|f'(u(x))|\,|u(x)| + |f(0)|\right)^p$$

$$\underset{\text{Minkowski}}{\leq} \frac{1}{2^{p-1}}\left(|f'(u(x))|^p |u(x)|^p + |f(0)|^p\right)$$

$$|f+g|^p \leq \frac{1}{2^{p-1}} |f|^p + |g|^p$$

$$\leq \frac{1}{2^{p-1}}\left(M^p |t|^p + |f(0)|^p\right)$$

$$\Rightarrow \int |f(u(x))|^p \leq \frac{1}{2^{p-1}} M \int_\Omega |u(x)|^p dx + \frac{1}{2^{p-1}} \int_\Omega |f(0)|^p dx$$

$< \infty$ porque $u \in L^p(\Omega)$ y Ω es acotado.

Queremos ver que $f(u_m) \longrightarrow f(u)$ en L^p
y $f'(u_m)\partial_i u_m \longrightarrow f'(u)\partial_i u$ en L^p.

$$\cdot \int_\Omega |f(u_m) - f(u)|^p dx \underset{\text{por } (*)}{\leq} M \int_\Omega |u_m - u|^p dx \longrightarrow 0$$

por $(*_2)$ cuando $m \to \infty$.

$\bullet \displaystyle\int_\Omega |g'(u_m)\partial_i u_m - g'(u)\partial_i u|^p\,dx$

$= \displaystyle\int_\Omega |g'(u_m)\partial_i u_m \pm g'(u)\partial_i u_m - g'(u)\partial_i u|^p\,dx$

$\leq \displaystyle\frac{1}{2^{p-1}}\int_\Omega |g'(u_m)-g'(u)|^p|\partial_i u_m|^p\,dx + \frac{1}{2^{p-1}}\int_\Omega |g'(u)|^p|\partial_i u_m - \partial_i u|^p\,dx$

Minkowski $= \dfrac{1}{2^{p-1}}(I_1 + I_2).$

Analicemos I_1:

Por $\star_4$ tenemos que $|g'(u_m)-g'(u)|^p \longrightarrow 0$ ctp.

Además, $|g'(u_m)-g'(u)|^p|\partial_i u|^p \leq \underbrace{2M|\partial_i u|^p}_{\text{función integrable en }\Omega}$

$\underset{\text{por TCD}}{\Rightarrow} \quad I_1 = \displaystyle\int_\Omega |g'(u_m)-g'(u)|^p|\partial_i u|^p\,dx \longrightarrow 0$

Analicemos I_2:

$I_2 \leq M\displaystyle\int_\Omega |\partial_i u_m - \partial_i u|^p\,dx \longrightarrow 0$ por $\star_3$

$\therefore\ g(u_m) \longrightarrow g(u)$ en $L^p(\Omega)$

y $g'(u_m)\partial_i u_m \longrightarrow g'(u)\partial_i u$ en $L^p(\Omega)$.

Pero, además, $\partial_i(g(u_m)) = g'(u_m)\partial_i u_m$

$\Rightarrow g(u_m) \longrightarrow g(u)$ en $L^p(\Omega)$

y $\partial_i(g(u_m)) \longrightarrow g'(u)\partial_i(u)$. en $L^p(\Omega)$.

Haciendo la prueba de $C^\infty \cap W^{1,p}$ aprox a $W^{1,p}$ pero tomando funciones C^1, se tiene que $\partial_i(g(u)) = g'(u)\partial_i(u)$.

OBS| Es suficiente pedir $f \in C^1$ y f globalmente Lipschitz.

(b). Suponga $u \in L^\infty(\Omega)$. Pruebe regla de la cadena.

Sea $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = M$.

Definimos $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, una cut-off tq

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq M \\ 0 & |t| \geq M+1 \end{cases}$$

Definimos $g(t) = \psi(t) f(t)$.

$\Rightarrow g \in C^1(\mathbb{R})$ y g' está acotada.

(como ψ tiene sop. compacto, g y g' también lo tienen).

Además,

$$g(u(x)) = \psi(u(x)) f(u(x)) = f(u(x))$$

$$g'(u(x)) = \cancel{\psi'(u(x))}_{0} f(u(x)) + f'(u(x)) \psi(u(x))$$

$$= f'(u(x)).$$

Por lo tanto, por (a), se tiene

$$\partial_i \big(f(u(x)) \big) = \partial_i \big(g(u(x)) \big) \underset{(a)}{=} g'(u(x)) \, \partial_i u(x)$$

$$= f'(u(x)) \, \partial_i u(x).$$

P3)

Sea Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^d$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Demuestre que $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \| |u| \|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Basta con comprobar que $\| \partial_i |u| \|_{L^p(\Omega)} = \| \partial_i u \|_{L^p(\Omega)}$.

Consideremos $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_\varepsilon(t) = \sqrt{t^2 + \varepsilon^2}$

$$\Rightarrow \quad f_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} |t| \quad y \quad f_\varepsilon'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} sg(t) \quad \star$$

Además, $f \in C^1(\mathbb{R})$ y globalmente Lipschitz.

$$\underset{\text{por P2}}{\Rightarrow} \quad f_\varepsilon(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad y \quad \partial_i(f_\varepsilon(u)) = f_\varepsilon'(u)\, \partial_i u.$$

Así, para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u)\, \partial_i \varphi \, dx \underset{(IPP)}{=} -\int_\Omega f_\varepsilon'(u)\, \partial_i u \; \varphi \, dx$$

Por $\star$ se tiene que
$$f_\varepsilon(u) \longrightarrow |u| \text{ puntualmente}$$
$$f_\varepsilon'(u) \longrightarrow sg(u) \text{ puntualmente}$$

Además,

$$|f_\varepsilon(u)\, \partial_i \varphi| \le \underbrace{|\partial_i \varphi| \begin{cases} \sqrt{2u^2} & \text{si } u \geq \varepsilon \\ \sqrt{2\varepsilon^2} & \text{si } u \leq \varepsilon \end{cases}}_{\text{función integrable en } \Omega \text{. (acotado)}}$$

Scanned by CamScanner

Y tenemos que

$$\left| \frac{u\, \partial_i u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} \varphi \right| = \frac{|u|\ |\partial_i u|}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} |\varphi| \leq \underbrace{|\partial_i u|\,|\varphi|}_{\text{función integrable en } \Omega.}$$

$\Rightarrow$ por TCD tomando $\varepsilon \to 0$

$$\int_\Omega |u|\, \partial_i \varphi\, dx = -\int_\Omega sg(u)\, \partial_i u \cdot \varphi\, dx$$

Así, $\partial_i |u| = sg(u)\, \partial_i u$. En particular,

$$\| \partial_i |u| \|_{L^p(\Omega)} = \| \partial_i u \|_{L^p(\Omega)}.$$

P4|

Sea $\phi \in D(\mathbb{R}^d)$, $h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Se define.

$$\phi_t = \frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t}$$

(a) Muestre que $\phi_t \in D(\mathbb{R}^d)$

(b) Demuestre que ϕ_t converge en $D(\mathbb{R}^d)$ cuando $t \to 0$. Calcule su límite.

(c). Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, definimos

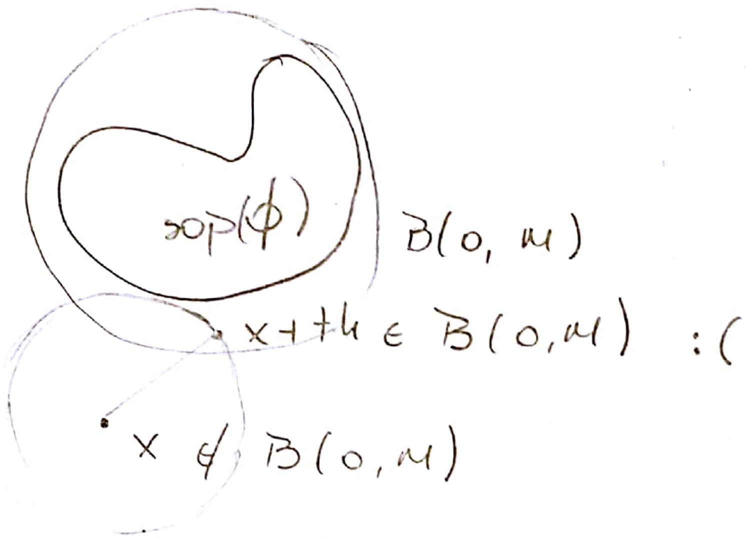
$$\partial_{ih} u = \frac{\phi(x+e_i h) - \phi(x)}{h}$$

Pruebe que si $\exists\ k$ tq $\|\partial_{ih} u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq k \Rightarrow \partial_i u \in L^p$ y $\|\partial_i u\| \leq k$

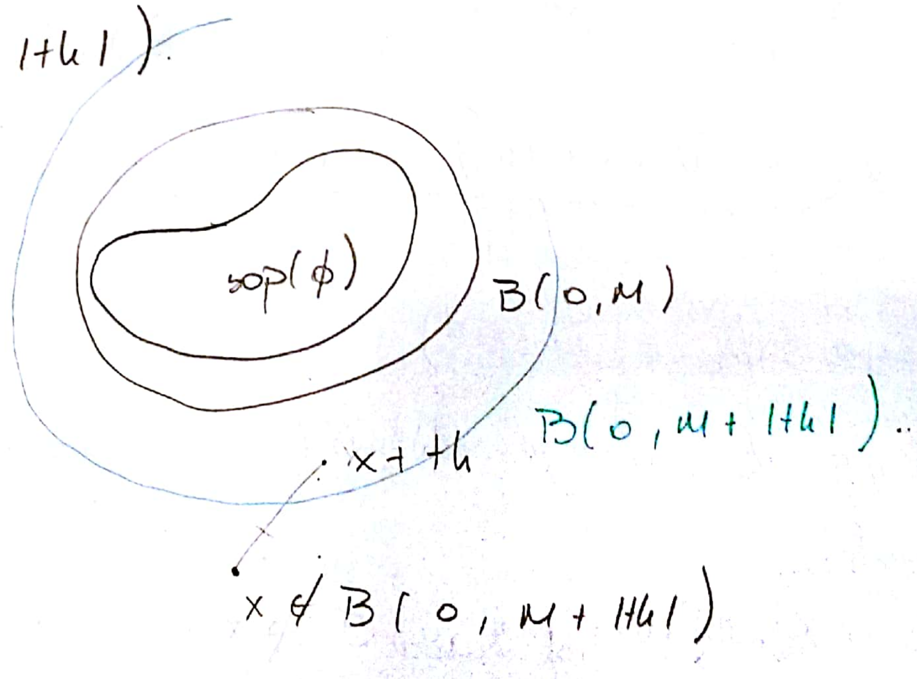
(a). Es claro que $\phi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Veamos que tiene soporte compacto.

Como $\phi \in D(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists\ M$ tq $sop(\phi) \subset B(0, M)$

(ie) $\phi(x) = 0 \quad \forall\ |x| \geq M$.



Necesitamos tomar x más lejos de $sop(\phi)$. Consideremos $B(0, M+|th|)$.



Sea $x \in B(0, M+|th|) \Rightarrow |x+th| \geq |x| - |th|$

$\geq M + |th| - |th| = M$

$\Rightarrow x+th \notin B(0,M)$.

Por lo tanto, $\phi(x)=0$ y $\phi(x+th)=0$ $\forall\ |x|\geq M+|th|$

$\Rightarrow$ $sop(\phi_t) \subset B(0, M+|th|)$.

$\Rightarrow$ $\phi_t \in D(\mathbb{R}^d)$.

(b). Para probar la convergencia $\phi_t \longrightarrow \varphi$ hay que verificar

i). $\exists\ K$ compacto tq $sop(\phi_t) \subset K$ $\forall t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$.

ii). $\sup\limits_{x\in K} |\partial^\alpha \phi_t - \partial^\alpha \varphi| \longrightarrow 0$ $\forall\ \alpha \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^d$.

i). Lo probaremos para t "pequeño".

Sea $|t| \leq 1 \Rightarrow sop(\phi_t) \subseteq B(0, M+|th|) \subseteq B(0, M+|h|)$

(independiente de t)

ii). TAYLOR CON RESTO INTEGRAL

Sea $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$; $\psi \in C^N$

$$\psi(x_0) = \sum_{|\alpha|=N-1} \frac{1}{\alpha!}(x_0-x)^\alpha (\partial^\alpha \psi)(x)$$

$$+ \int_0^1 (1-u)^{N-1} \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha \partial^\alpha \psi(u x_0 + (1-u)x)\, du$$

$$\Rightarrow \partial^\alpha \phi(x+th) = \partial^\alpha \phi(x) + th \cdot \nabla(\partial^\alpha \phi)$$

$$+ \int_0^1 (1-u)^{N-1} \sum_{i,j=1}^{d} t^2 h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\partial^\alpha \phi)(uth+x)\, du$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial^\alpha \phi(x+th) - \partial^\alpha \phi(x)}{t} - h \cdot \nabla(\partial^\alpha \phi(x)) \right|$$

$$\leq |t| \int_0^1 |1-u|^{N-1} \left| \sum_{i,j=1}^{d} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\partial^\alpha \phi)(uth+x) \right| du$$

$$\leq |t| \int_0^1 |1-u|^{N-1} |h|^2 \sup_{y \in K} |\partial^\beta \phi(uth+x)| \, du$$

$\partial^2 (\partial^\alpha \phi)$

es una derivada del tipo ∂^β

y puedo tomar supremo porque

$\phi \in C_0^\infty \Rightarrow$ también sus derivadas tienen sop. compacto.

$$\leq C |t| \, \|h\|^2 \sum_{|\beta| = |\alpha|+2} \sup_{y \in K} |\partial^\beta \phi(y)| \int_0^1 |1-u| \, du$$

$\leq C |t| \, |h|^2$ cota no depende de x

Por lo tanto, tomando $t \to 0$, tenemos que

$$\partial^\alpha \phi_t \longrightarrow \nabla(\partial^\alpha \phi) \text{ unif en } K$$

$$\Rightarrow \phi_t \longrightarrow \nabla \phi \text{ en } D(\mathbb{R}^d).$$

Scanned by CamScanner

(c) Como $\|\partial_{ih} u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le L$

$\Rightarrow \exists \; h_m$ y v tq $\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le L$ y

$$\int \partial_{ih_m} u \, \varphi \longrightarrow \int v \varphi \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^d)$$

porque toda sucesión acotada en L^p posee una subsucesión débil convergente.

Además,

$$\int \partial_{ih_m} u \, \varphi \, dx = - \int \partial_i(-h_m) \varphi \, u \, dx$$

$$\downarrow$$

$$\int u(x+he_i)\varphi(x) \underset{(cv)}{=} \int u(y) \varphi(y-he_i)$$

Y tenemos que $\int \partial_i(-h_m) \varphi \, u \longrightarrow - \int u \, \partial_i \varphi$

Por lo tanto, por unicidad del límite

$$\int v \varphi = - \int u \, \partial_i \varphi$$