MA4802-1. Ecuaciones en Derivadas Parciales
Profesor: Hanne Van Den Bosch
Auxiliares: Camilo Gómez, María Eugenia Martínez

Auxiliar 6

30 de octubre, 2018

P1. Regularidad de solución de Calor

Consideremos

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

a) Sea $f \in S(\mathbb{R}^d)$, probar que existe una única solución de la ecuación (1) y verifica $u \in C^\infty([0,\infty); S(\mathbb{R}^d))$.

b) Sea $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, demostrar u solución de (1) satisface $\partial_t^j u \in H^{s-2j}(\mathbb{R}^d)$.

P2. Sea $f \in S(\mathbb{R}^d)$, $h \in C(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^d))$, $M > 0$, demostrar que existe a lo sumo una solución de la ecuación

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + Mu = h & \text{en } [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2}$$

P3. [Propuesto] Sea $f \in S(\mathbb{R}^d)$, $h \in C(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^d))$. Demostrar que existe a lo sumo una solución de la ecuación

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = h & \text{en } [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3}$$

P4. Velocidad de propagación finita

Sea $u \in H^1(\mathbb{R})$ solución de

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \tag{4}$$

. Fijemos $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $t_0 > 0$ y consideremos el cono

$$C = \{(t,x)/0 \le t \le t_0, |x - x_0| \le t_0 - t\}.$$

Suponga $u \equiv u_t \equiv 0$ en $B(x_0,t_0)$. Luego, $u = 0$ en C.

P5. Sea $p > 1$, $u \in S(\mathbb{R}^d)$ solución de la ecuación de Schrodinger no lineal

$$iu_t + \Delta u = |u|^{p-1}u. \tag{5}$$

Probar que las siguientes cantidades son conservadas:

a)

$$P(t) := \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla \overline{u} dx.$$

b)

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1} dx.$$