Eserciclo 2.

→ Tenemos una trayectoria conica con los siguientes datos.

$$z(t) = \rho(t) \quad , \quad \frac{dz}{d\phi} = R \quad , \quad \phi = \omega t$$

con R y ω conocidos y $z(0) = 0$

a) Encontrar $\vec{r}$, $\vec{v}$ como función del tiempo

- Si partimos de la relación: $\frac{dz}{d\phi} = R$ e integramos

$$\Rightarrow \quad dz = R\, d\phi \quad \Big/ \int_0^t$$

$$\Rightarrow \int_{z(0)}^{z(t)} dz = R \int_{\phi(0)}^{\phi(t)} d\phi$$

Dato: $\phi = \omega t$

$$\Rightarrow \boxed{z = R\phi} \quad \Rightarrow \boxed{z = R\omega t}$$

- Luego la posición en cilindricas será

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \quad ; \quad z = \rho$$

$$= \rho(\hat{\rho} + \hat{z}) \quad ; \quad \rho = z = R\omega t$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} = R\omega t(\hat{\rho} + \hat{z})}$$

- Derivamos para sacar la aceleración

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R\omega(\hat{\rho} + \hat{z}) + R\omega t\dot{\hat{\rho}} \quad ; \quad \dot{\hat{\rho}} = \dot{\phi}\hat{\phi} = \omega\hat{\phi}$$

$\dot{\phi} = \omega t$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = R\omega\hat{\rho} + R\omega^2 t\hat{\phi} + R\omega\hat{z}}$$

b) Determinar la magnitud de la aceleración

- Derivamos la velocidad

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = R\omega\dot{\hat{\rho}} + R\omega^2\hat{\phi} + R\omega^2 t\dot{\hat{\phi}} + 0$$

$$= R\omega^2\hat{\phi} + R\omega^2\hat{\phi} - R\omega^3 t\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^3 t\hat{\rho} + 2R\omega^2\hat{\phi}}$$

- Sacamos el módulo

$$|a|^2 = R^2\omega^6 t^2 + 4R^2\omega^4$$

$$= R^2\omega^6 t^2\left(1 + \frac{4}{\omega^2 t^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{a}| = R\omega^3 t\sqrt{1 + \frac{4}{\omega^2 t^2}}}$$

Scanned by CamScanner