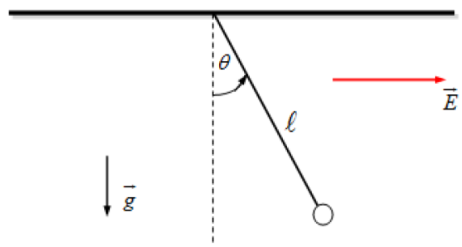
Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2002: Electromagnetismo- Semestre Otoño 2019

PAUTA Auxiliar 1: Ley de Coulomb, Campo por definición y Ley de Gauss

Profesor: Nicolás Vidal
Auxiliares: Diland Castro, José Castro y Almendra Del Moral
Fecha: 18 de Marzo de 2019

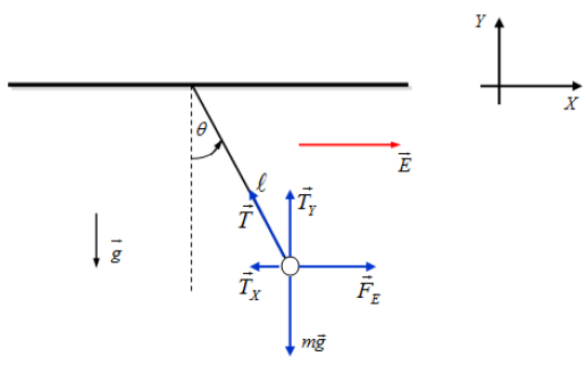
Pregunta 1:

Una esfera plástica cargada tiene una masa m y se cuelga de un hilo de largo l, en una región donde existe un campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ como se muestra en la figura. Si la esfera permanece en equilibrio en un ángulo θ entre la vertical y el hilo que sostiene. Se pide:



Solución

A. Calcular la carga q de la esfera.
Partimos identificando todas las fuerzas que actúan sobre la esfera. Hacemos un DCL como se muestra a continuación.



Utilizando las relaciones conocidas entre el campo y la fuerza producidad por el campo eléctrico presente se puede escribir.

$$\overrightarrow{F}_E = q \cdot \overrightarrow{E}$$

Dada la dirección de campo $\overrightarrow{E} = E\hat{\imath}$, se puede escribir : $\overrightarrow{F}_E = q \cdot E\hat{\imath}$.

Para la tensión:

$$\overrightarrow{T} = -T\,sin(\theta)\,\hat{i} + T\,cos(\theta)\,\hat{j}$$

Considerando que mg actúa en el eje Y, es posible escribir las relaciones por eje. Considerando como condición de equilibrio $\sum F = 0$.

Para el eje X:

$$\sum F_x = qE - Tsin(\theta) = 0 \qquad (1)$$

Para el Y:

$$\sum F_y = Tcos(\theta) - mg = 0 \qquad (2)$$

De (2) podemos obtener:

$$T = \frac{mg}{cos(\theta)} \qquad (3)$$

Si se reemplaza (3) en (1).

$$qE - \frac{mg}{cos(\theta)} sin(\theta) = 0 \qquad (4)$$

Entonces podemos despejar q.

$$q = \frac{mg \cdot tan(\theta)}{E} \qquad (5)$$

B. Suponga que la esfera pierde carga a una tasa de $\alpha[\frac{C}{seg}]$. Calcular la velocidad angular que produce esta descarga para $\theta \ll 1$

Se tenía (5). Entonces, usando $\theta \ll 1$ (podemos decir que $sen(\theta) \approx \theta$, así $tan(\theta) \approx \theta$. Luego q puede aproximarse por:

$$q(t) \approx \frac{mg \cdot \theta(t)}{E} \qquad (6)$$

Con el dato de α es posible despejar de la siguiente manera.

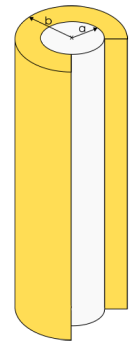
$$\frac{dq}{dt} \approx \frac{mg}{E}\frac{d\theta}{dt} \qquad (7)$$

A continuación usamos $\frac{dq}{dt} = \alpha$, y despejamos $\frac{d\theta}{dt}$.

Finalmente,

$$\frac{\alpha E}{mg} \approx \frac{d\theta}{dt} = velocidad\ angular \qquad (8)$$

▪ Pregunta 2 : Ley de Gauss



Entre dos superficies cilíndricas infinitas en ambos sentidos, concéntricas al eje z y de radios a y b respectivamente, se tiene una densidad de carga volumétrica proporcional a la coordenada r, determinada por:

$$\rho(r) = B \cdot r \qquad a < r < b$$

Fuera de esta zona la densidad de carga es nula.

- Determine el campo eléctrico en todo el espacio.

Solución

De la expresión para la densidad de carga $\rho(r)$ se aprecia que ésta solo varía radialmente, por tanto, podemos establecer que el sistema presenta simetría cilíndrica.

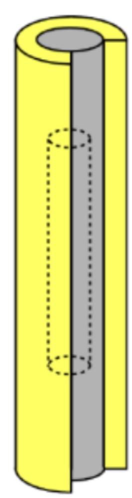
$$\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$$

Con esto en mente, resulta conveniente utilizar Ley de Gauss para poder encontrar el campo eléctrico de la distribución descrita.
Es importante notar que vamos a elegir 3 superficies gaussianas, para los 3 casos de interés (nos piden el campo eléctrico en todo el espacio). Estos serán:

CASO 1: $r < a$; **CASO 2:** $a < r < b$; **CASO 3:** $r > b$

CASO 1: $r < a$

Sabemos que podemos escribir la Ley de Gauss en su forma integral de la siguiente manera:



$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Donde la integral de la izquiera corresponde el flujo eléctrico. Como supusimos simetría cilíndrica, hay flujo solamente por el manto del cilindro y no por las tapas (ya que el campo apunta solo de forma radial), de ahí que calculamos el flujo como sigue:

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} [E(r)\hat{r}] \cdot [rd\phi dz\hat{r}] = 2\pi\, l\, r\, E(r) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Obtenido el flujo eléctrico para nuestra superficie gaussiana de radio r el cual resultó ser $2\pi\, l\, r\, E(r)$, resta obtener la carga encerrada por nuestra superficie.

Sin embargo, se puede observar que por estar en la parte hueca del cilindro, la carga encerrada es nula. Para el caso 1 entonces, la carga encerrada es 0 ($Q_{encerrada} = 0$), pues no hay densidad de carga para $r < a$, con esto y aplicando la Ley de Gauss.

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} [E(r)\hat{r}] \cdot [rd\phi dz\hat{r}] = 2\pi\, l\, r\, E(r) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0}$$

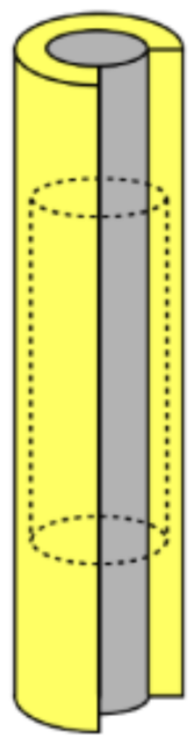
De donde obtenemos que:

$$2\pi\, l\, r\, E(r) = \frac{0}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = 0\ \hat{r}\ \ ,\ para\ \ r < a$$

CASO 2: $a < r < b$

Como el flujo lo calculamos para la superfice gaussiana de radio r escogida, la expresión para el flujo será la misma en los tres casos, lo que cambia entonces será la $Q_{encerrada}$, notar que como la densidad de carga es variable, para encontrar esta carga encerrada será necesario integrar y no se podrá usar la multiplicación de densidad por volumen.



Entonces, nuevamente escribimos la Ley de Gauss en su forma integral y como supusimos simetría cilíndrica, hay flujo solamente por el manto del cilindro y no por las tapas.

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} [E(r)\hat{r}] \cdot [rd\phi dz\hat{r}] = 2\pi\, l\, r\, E(r) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Ahora viene la parte distinta, para el caso 2 ($a < r < b$) la carga encerrada es distinta de cero y se obtiene integrando de la siguiente manera, notamos que debemos "cubrir con carga" nuestro cilindro gaussiano de radio r (con $r \in (a, b)$) y altura l.

$$Q_{encerrada} = \int_v \rho(r) dV$$

El dV en cilíndricas corresponde a :

$$dV = rdrd\phi dz$$

$$Q_{encerrada} = \int_{r:a}^{r} \int_{\phi:0}^{2\pi} \int_{z:0}^{l} (B\, r)\, rdrd\phi dz = B \int_{r:a}^{r} r^2 dr \int_{\phi:0}^{2\pi} d\phi \int_{z:0}^{l} dz = B\left[\left(\frac{r^3}{3} \right)_a^r 2\pi\, l \right] = 2\pi l B \left[\frac{r^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right]$$

Calculada la carga encerrada, resta utilizar la Ley de Gauss para relacionar la carga encerrada con el flujo obtenido anteriormente. Entonces,

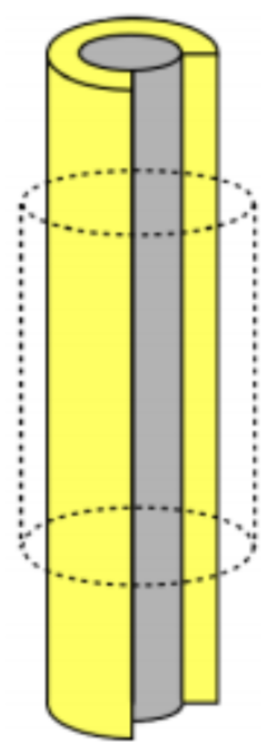
$$\int_0^l \int_0^{2\pi} [E(r)\hat{r}] \cdot [rd\phi dz\hat{r}] = 2\pi\, l\, r\, E(r) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{2\pi lB\left[\frac{r^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right]}{\epsilon_0} = \frac{2\pi lB(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0}$$

$$2\pi\, l\, r\, E(r) = \frac{2\pi lB(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{B(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0\, r}$$

De esta manera, para el caso 2 se tiene que:

$$\vec{E}(r) = \frac{B(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0\, r}\hat{r} \;\;,\;\; para \;\; a < r < b$$

CASO 3: $r > b$



El proceso es similar al anterior, como es de esperar, el flujo es el mismo y resta obtener una nueva expresión para la carga encerrada por la superficie gaussiana. Notamos que como estamos fuera del cilindro original cargado, para obtener la carga encerrada debemos integrar desde $r = a$ hasta $r = b$, es importante notar que sigue siendo la misma integral de 0 a r, con $r > b$, sin embargo, sabemos que para $r \in (0, a)$ y $r \in (b, r)$ no hay densidad de carga y por tanto no existe carga encerrada en esos sectores.
De esta forma, obtenido el flujo eléctrico igual a $2\pi\, l\, r\, E(r)$, se procede a calcular la nueva expresión para la carga encerrada, si notan, la forma es la misma,salvo que en vez de r ahora integramos hasta b.

$$Q_{encerrada} = \int_{r:\,a}^{b} \int_{\phi:0}^{2\pi} \int_{z:0}^{l} (B\, r)\, rdrd\phi dz = B\int_{r:\,a}^{b} r^2 dr \int_{\phi:0}^{2\pi} d\phi \int_{z:0}^{l} dz$$

$$Q_{encerrada} = B\left[\left(\frac{r^3}{3}\right)_a^b 2\pi\, l\right] = 2\pi lB\left[\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right]$$

Usando $Q_{encerrada} = 2\pi l B\left[\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right]$ para aplicar Ley de Gauss:

$$\int_0^l \int_0^{2\pi} [E(r)\hat{r}] \cdot [r d\phi dz \hat{r}] = 2\pi\, l\, r\, E(r) = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{2\pi l B\left[\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right]}{\epsilon_0} = \frac{2\pi l B(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}$$

$$2\pi\, l\, r\, E(r) = \frac{2\pi l B(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{B(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0\, r}$$

De esta manera, para el caso 3 se tiene que:

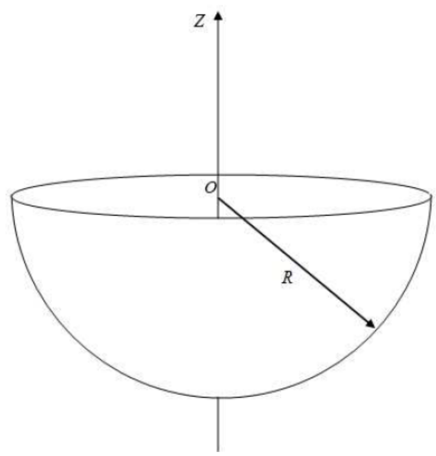
$$\vec{E}(r) = \frac{B(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0\, r}\hat{r} \;\;,\; para \;\; r > b$$

En síntesis,el campo eléctrico en todo el espacio queda dado por:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0\,\hat{r} & \text{si} \quad r < a \\ \frac{B(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0\, r}\,\hat{r} & \text{si} \quad a < r < b \\ \frac{B(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0\, r}\,\hat{r} & \text{si} \quad r > b \end{cases}$$

Pregunta 3:[Campo eléctrico por definición]

Un recipiente semiesférico no conductor de radio a tiene una carga total Q uniformemente distribuida en su superficie interior. Encuentre el campo eléctrico en el punto O.



Solución

Este tipo de problema con distribuciones de carga un tanto más complejas podemos resolverlo utilizando la definición de Campo eléctrico.

$$d\overrightarrow{E} = \frac{dq(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'})}{4\pi\epsilon_0||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}||^3} \tag{0.1}$$

Primeramente podemos notar que el elemento de carga dq se puede escibir como $dq = \sigma dA$, con σ la densidad de carga superficial. Luego, como la carga está distribuida uniformemente, se tiene que:

Como lo que haremos en esta oportunidad es superponer los campos de cargas puntuales de los elementos de cargas infinitesimales (de ahí viene la utilización de $\int$).

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

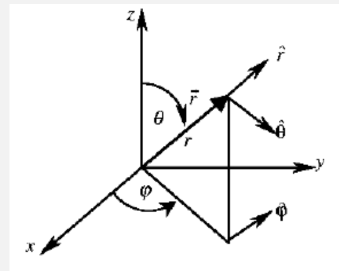
Como se puede ver que los campos eléctricos en el plano XY se cancelan mutuamente por simetría, podemos inferir que el campo irá en la dirección $\hat{k}$. Es decir, $\overrightarrow{E} = E\hat{k}$.

Por otro lado, para recorrer los elementos de carga de la semiesfera utilizamos coordenadas esféricas.

En este caso, es importante recordar.
(Usando que $r = a = radio$)

$dS(esféricas) = a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$
$\overrightarrow{r}'_{posición\ de\ la\ carga} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
$= a\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{i} + a\,\text{sen}(\theta)\,\text{sen}(\varphi)\hat{j} + a\cos(\theta)\hat{k}$

$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$ (Donde se quiere calcular el campo)



Teniendo el dS, podemos encontrar $dq = \sigma dS = \frac{Q}{2\pi a^2} \cdot a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \frac{Q}{2\pi} \cdot \sin(\theta) d\theta d\varphi$.
Como tenemos la integral de superficie y el correspondiente vector para identificar un elemento de la esfera ($\overrightarrow{r}'$), debemos verificar los límites de tal forma que se recorra la superficie con los elementos de carga correspondientes a una semiesfera.

$$\theta : \quad desde \ \frac{\pi}{2} \quad hasta \ \ \pi$$

$$\varphi : \quad desde \ \ 0 \quad hasta \ \ 2\pi$$

Entonces, debemos calcular:

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{Q}{2\pi} \cdot \sin(\theta) d\theta d\varphi \frac{-\overrightarrow{r}'}{|| - \overrightarrow{r}'||^3}$$

Por el argumento de simetría, solamente nos interesa la componente en $\hat{k}$ (verificar que las demás componentes de anulan).
Además, es fácil ver que $||\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|| = || - \overrightarrow{r}'|| = a$.
Con esto en cuenta y considerando que la integral sobre φ entrega un 2π, la integral se reduce a lo siguiente.

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Q \cdot \sin(\theta) d\theta \frac{-a\cos(\theta)}{a^3} \hat{k}$$

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin(\theta) \frac{\cos(\theta)}{a^2} d\theta \hat{k}$$

Con la relación: $2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$.

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{\sin(2\theta)d\theta}{2}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0}) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin(2\theta)d\theta\hat{k}$$

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0}) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\cdot\left(\frac{\cos(2\theta)}{2}\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\hat{k}$$

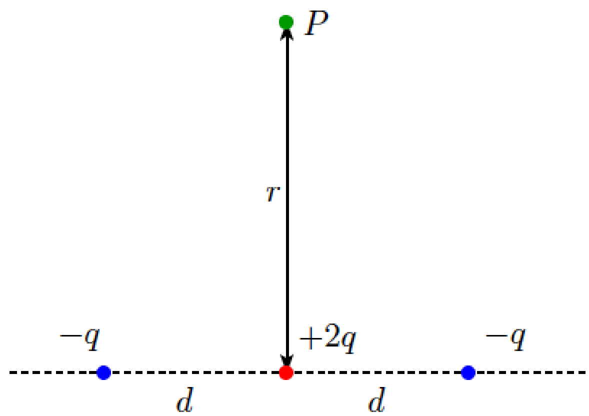
$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0}) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-(-1)\right)\hat{k} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\hat{k}$$

Finalmente,

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{0}) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}\hat{k}$$

Pregunta 4 [Propuesto]: [Campo eléctrico por definición]

Considera la siguiente distribución espacial de cargas puntuales.



Se pide:

A. Calcular el campo eléctrico en el punto P

Solución

El campo en el punto P es posible obtenerlo mediante el Principio de Superposición. Se tendrá como origen el punto punto P. Con esto $\vec{r} = 0$ (ya! estamos en el lugar donde queremos calcular el campo)

A continuación, escribimos los vectores que identifican las posiciones de las diferentes cargas que producen el campo que se siente en P.

$$\vec{r}'_{(+2q)} = -r\hat{\jmath}$$
$$\vec{r}'_{(-q_{izq})} = -r\hat{\jmath} - d\hat{\imath}$$
$$\vec{r}'_{(-q_{der})} = -r\hat{\jmath} + d\hat{\imath}$$

Con esto, podemos usar la definición y encontrar los campos producidos por cada carga. Partimos con el campo eléctrico producido por $+2q$.

De la definición es posible deducir:

$$\vec{E}_{(+2q)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\hat{\jmath}$$

A continuación,

$$\overrightarrow{E}_{(-q_{izq})} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath}+d\hat{\imath}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\overrightarrow{E}_{(-q_{der})} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath}-d\hat{\imath}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

Luego, el campo eléctrico total se puede calcular por superposición como sigue. Primeramente, se establece que

$$\overrightarrow{E}_P = \overrightarrow{E}_{(+2q)} + \overrightarrow{E}_{(-q_{izq})} + \overrightarrow{E}_{(-q_{der})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\hat{\jmath} + -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath}+d\hat{\imath}}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath}-d\hat{\imath}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

Se suprimen los campos de la componete $\hat{\imath}$.

$$\overrightarrow{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\hat{\jmath} + -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

Con esto,

$$\overrightarrow{E}_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right)\hat{\jmath}$$

B. Evalúe el caso límite $r \gg d$, ¿cómo varía la magnitud del campo eléctrico con la distancia en este caso?

HINT:

$$(1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon, \quad para \ \ \epsilon \ll 1$$

Para ver como se comporta en el caso límite, intentamos reordenar el campo en el punto P para aplicar alguna aproximación pertinente.

$$\overrightarrow{E}_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right)\hat{\jmath} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{\left(r^2\cdot(1+\frac{d^2}{r^2})\right)^{3/2}}\right)\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{E}_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\left(1+(\frac{d}{r})^2\right)^{-3/2}}{r^2}\right)\hat{\jmath}$$

Ocupando el Hint, se obtiene que:

$$\left(1+\frac{d^2}{r^2})\right)^{-3/2} \approx 1-\frac{3}{2}\frac{d^2}{r^2}$$

Luego,

$$\overrightarrow{E}_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{3}{2r^2}\frac{d^2}{r^2}\right)\hat{\jmath}$$

Compactando todavía más la última expresión, se obtiene finalmente que:

$$\overrightarrow{E}_P^{\,r\gg d} = \frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\hat{\jmath}$$

Se advierte que para la aproximación utilizada, es decir, para $r \gg d$, la distribución de cargas mostrada genera un campo que decae como $\frac{1}{r^4}$, lo cual contrasta con el campo de una carga puntual que decae como $\frac{1}{r^2}$.

Consultas, sugerencias o reclamos:

diland.castro@ing.uchile.cl