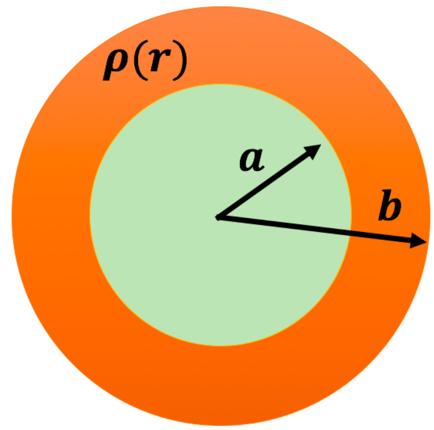
Pauta Ejercicio 1

Profesor: Nicolás Vidal
Auxiliares: Diland Castro, José Castro y Almendra Del Moral
Fecha: 25 de Marzo de 2019

P1. Se tiene dos esféras concéntricas, una de radio a y la otra de radio b, con $b > a$, como muestra la figura. Entre los radios a y b se dispone la siguiente distribución volumétrica de carga en coordenadas esféricas.

$$\rho(r) = \frac{k}{r^2}, \quad para \ \ r \in (a, b) \ \ y \quad k = cte$$

Para $r < a$ la densidad de carga es nula.



(a) Utilizando la Ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico en todo el espacio. Identifique claramente las 3 regiones de interés.

(b) Usando el resultado anterior del campo eléctrico y la expresión integral para la diferencia de potencial . Calcule la diferencial de potencial existente entre $r = a$ y $r = b$.

SOLUCIÓN A:
La manera más rápida de abordar el problema era utilizando la Ley de Gauss, teniendo en consideración que se nos presentaba una densidad volumétrica de carga , la cual variaba de acuerdo a la ecuación mostrada en el enunciado.

Se distinguían 3 casos importantes de estudio.

CASO 1: $r < a$; **CASO 2:** $a < r < b$; **CASO 3:** $r > b$

Lo que va a diferenciar cada uno de los casos será la carga total encerrada, por las distintas superficies gaussianas escogidas para cada caso.

CASO 1: $r < a$

El flujo, lo calculamos de manera habitual, suponiendo que estamos en presencia de una simetría esférica ($\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$), para una superficie gaussiana esférica de radio r.

Calculando el flujo...

$$\oiint E \cdot dS = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Obs: Podrían haberlo calculado de manera directa o integrando el dS en Esféricas.

Notar nuevamente que el flujo siempre es el mismo (para todos los casos), no así la carga encerrada.

Para el caso 1, la carga encerrada es 0, $Q_{encerrada} = 0$, pues no hay densidad de carga para $r < a$, con esto y aplicando la Ley de Gauss.

$$\oiint E \cdot dS = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$$

Como no hay carga encerrada, entonces :

$$\vec{E}(r) = 0 \ \hat{r} \ \ , \ para \ \ r < a$$

CASO 2: $a < r < b$

El flujo es el mismo, y se calcula como sigue, escogiendo una superficie gaussiana de radio r, con $a < r < b$, se obtiene que :

$$Flujo = \oiint E \cdot dS = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Falta la carga encerrada,

$$Q_{encerrada} = \int_v \rho(r) dV$$

El dV en esféricas corresponde a :

$$dV = r^2 sen(\theta) d\theta dr d\varphi$$

$$Q_{encerrada} = \int_{r:a}^{r} \int_{\varphi:0}^{2\pi} \int_{\theta:0}^{\pi} \left(\frac{k}{r^2}\right) r^2 sen(\theta) d\theta dr d\varphi$$

Obs 2: Notar que entre $r = 0$ a $r = a$ no hay carga encerrada.
Separando para integrar y simplificando los r^2.

$$Q_{encerrada} = k \int_{r:a}^{r} dr \int_{\varphi:0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta:0}^{\pi} sen(\theta) d\theta$$

$$Q_{encerrada} = k \cdot (r - a)(2\pi)(2) = 4\pi k(r - a)$$

Aplicando la ley de Gauss

$$\oiint E \cdot dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi k(r - a)}{\epsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi k(r - a)}{\epsilon_0}$$

Con lo cual, despejando se obtiene que :

$$E(r) = \frac{k(r - a)}{\epsilon_0 r^2} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{k(r - a)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} \ \ para \ \ a < r < b$$

CASO 3: $r > b$

Nuevamente, el flujo es el mismo, para una superficie gaussiana esférica de radio r, con $r > b$.

Para calcular la carga encerrada, ahora "estamos " fuera de la esfera, es decir, la carga encerrada es toda la carga, por lo tanto, los límites de integración cambian para la coordenada r, pues en este caso, la carga encerrada va desde $r = a$, hasta $r = b$.

$$Q_{encerrada} = k \int_{r:\,a}^{b} dr \int_{\varphi:0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta:0}^{\pi} sen(\theta) d\theta$$

$$Q_{encerrada} = k \cdot (b-a)(2\pi)(2) = 4\pi k(b-a)$$

Análogamente, se obtiene que :

$$E(r) = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} \;\; para \;\; r > b$$

En resumen, se obtuvo lo siguiente:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0\,\hat{r} & \text{si} \quad r < a \\ \frac{k(r-a)}{\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si} \quad a < r < b \\ \frac{k(b-a)}{\epsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si} \quad r > b \end{cases}$$

Saludos a todos! :)

SOLUCIÓN B:

Tal como dice la instrucción, usamos el campo eléctrico de la parte A.
Para encontrar la diferencia de potencial pedida, integramos el campo entre $r = a$ y $r = b$.
De esta forma:

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \frac{r-a}{\epsilon_0 r^2} dr = \frac{k}{\epsilon_0}\left[\log\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{a}{b} + 1\right]$$

Consultas, dudas, comentarios a: Diland.Castro@ing.uchile.cl