

RESUMEN

ELECTROMAGNETISMO



Autor: Diland Castro C.
Fecha de realización: Marzo 2017
Combarbalá, Chile

Índice

1. Electrostática en el Vacío	3
1.1. Ley de Coulomb	3
1.2. El Campo Eléctrico	3
1.2.1. ¿De dónde sale?	3
1.2.2. Generalizando una expresión para el Campo Eléctrico	4
1.2.3. Principio de superposición	4
1.2.4. Campo eléctrico para distribuciones continuas de carga	5
1.3. Ley de Gauss	6
1.3.1. Ley de Gauss	6
1.4. El Potencial Eléctrico	6
1.4.1. Potencial Eléctrico para distribuciones continuas de carga	7
1.4.2. Trabajo de un campo eléctrico	7
1.4.3. Diferencia de potencial	7
1.4.4. La diferencia de potencial y una mirada más general al potencial eléctrico	8
1.4.5. La estrecha relación entre Potencial eléctrico y Campo eléctrico	8
1.5. Primera Ley de Maxwell(en el vacío)	8
1.6. El campo eléctrico como un campo conservativo	9
1.7. El Dipolo eléctrico o momento dipolar	9
1.7.1. Potencial eléctrico de un Dipolo	10
1.7.2. Dipolo de un conjunto de cargas y distribuciones	10
1.8. Técnicas especiales: Ecuación de Laplace y Poisson	11
2. Campos eléctricos en la materia	12
2.1. El Vector polarización	12
2.2. Potencial eléctrico en la materia	12
2.3. Como actúa la Polarización y como se distribuye	13
2.4. La primera ley de Maxwell en un medio dieléctrico (Generalización)	14
2.5. Ley de Gauss en medios materiales	14

Índice de figuras

1. Campo producido por una carga en cualquier lugar del espacio	4
2. Principio de superposición(muchas cargas)	4
3. Representación de distribuciones continuas de cargas	5
4. El dipolo eléctrico	9
5. El dipolo eléctrico en un punto cualquiera	10
6. Dipolo de un conjunto de cargas	10
7. Potencial eléctrico de un elemento volumen	12
8. Como actúa la polarización en un dieléctrico	13

1. Electroestática en el Vacío

Para iniciarnos en el estudio del electromagnetismo, partiremos considerando el caso en el cual la carga eléctrica se encuentra en un estado de reposo, de ahí el nombre de electroestática. Por otro lado, en esta sección solo nos preocuparemos cuando esta carga se encuentre en el vacío (más adelante viene más complejo, pero no tanto :D).

1.1. Ley de Coulomb

La primera ley básica que nos ayuda a entender como se comporta una carga eléctrica en reposo es la conocida, Ley de Coulomb, ésta, nos entrega la magnitud de la fuerza que recibe una carga q_1 , en presencia de otra q_2 .

$$|\vec{F}_{q_1 q_2}(r)| = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = |\vec{F}_{q_2 q_1}(r)|$$

Importante: r corresponde a la distancia existente entre las cargas.

1.2. El Campo Eléctrico

Cuando se "coloca" una carga en algún lugar del espacio, decimos que esta carga produce un "Campo Eléctrico", aún mejor, podemos decir que la expresión para el campo eléctrico que produce una carga q_1 tiene la siguiente forma:

$$\vec{E}_{q_1}(r) = \frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^2} \hat{r}$$

Observación:

- $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$
- También es importante saber que el Campo Eléctrico corresponde matemáticamente un campo vectorial, y físicamente a una perturbación en el espacio producida por una carga.

1.2.1. ¿De dónde sale?

Debemos saber que existe una relación entre la fuerza que "siente" una carga q_2 por la presencia de una carga q_1 , es decir, $\vec{F}_{q_2 q_1}(r)$ y el campo producido por una carga q_1 , esta relación es la siguiente:

$$\vec{F}_{q_2 q_1}(r) = q_2 \cdot \vec{E}_{q_1}(r) = q_2 \cdot \underbrace{\frac{q_1 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}}_{\text{Campo } q_1} = q_2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|^2} \hat{r}$$

1.2.2. Generalizando una expresión para el Campo Eléctrico

Algunas veces, vamos a querer saber como es el campo eléctrico en una posición \vec{r} , producto de una carga ubicada en la posición \vec{r}' .

No confundirse:	\vec{r}	Donde se quiere conocer el campo
	\vec{r}'	Donde se ubica la carga que produce el campo

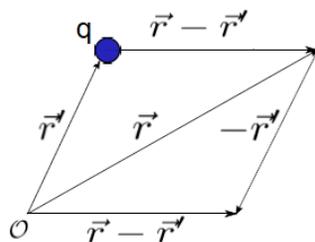


Figura 1: Campo producido por una carga en cualquier lugar del espacio

Teniendo claro el significado de cada vector posición, se tiene que la expresión para el campo eléctrico existente en \vec{r} , producto de una carga en la posición \vec{r}' es:

$$\vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

OJO: Las dimensiones para el campo eléctrico son $[\frac{N}{C}]$, es decir, fuerza sobre carga eléctrica. Otra forma de equivalente sería $[\frac{V}{m}]$ vale decir, volt sobre metro, esto en el sistema MKS.

1.2.3. Principio de superposición

No siempre va a haber solo una carga que produzca campo, es más, sería muy fome. Por esto, es importante conocer el principio de superposición, que en simples palabras nos dice que el campo total es igual a la suma de los campos que produce cada carga.

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

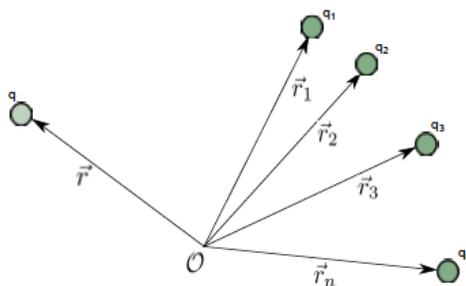


Figura 2: Principio de superposición(muchas cargas)

Recordando que hay una relación entre la fuerza que siente una carga, y el campo eléctrico que producen las demás cargas a su alrededor, podemos concluir algunas identidades importantes. Por ejemplo, la fuerza que siente la carga q , se expresa como:

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E}_1 + q \cdot \vec{E}_2 + q \cdot \vec{E}_3 + \dots + q \cdot \vec{E}_n = q \cdot \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Notar que:

$$\sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

1.2.4. Campo eléctrico para distribuciones continuas de carga

Para los casos en que no hay cargas puntuales, se debe acudir a las integrales (vistas como sumas infinitas), para obtener la expresión del campo eléctrico que produce una determinada distribución continua de carga. Esta puede ser de tres tipos: lineal, superficial y volumétrica.

Una forma de "ver" este nuevo caso es considerar lo siguiente: $\sum \rightarrow \int$, por otro lado, $q \rightarrow dq$. Aquí dq se ubica en la posición de \vec{r}' . El caso general corresponde a:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{r}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq$$

Tipo	Densidad de carga	Elemento Diferencial de carga	Expresión final del campo eléctrico
Lineal	$\lambda(\vec{r}') [\frac{C}{m}]$	$dq = \lambda(\vec{r}') dl'$	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\ \vec{r} - \vec{r}'\ ^3} \lambda(\vec{r}') dl'$
Superficial	$\sigma(\vec{r}') [\frac{C}{m^2}]$	$dq = \sigma(\vec{r}') ds$	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_{\tau} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\ \vec{r} - \vec{r}'\ ^3} \sigma(\vec{r}') ds'$
Volumétrica	$\rho(\vec{r}') [\frac{C}{m^3}]$	$dq = \rho(\vec{r}') dv$	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_{\tau} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\ \vec{r} - \vec{r}'\ ^3} \rho(\vec{r}') dv'$

Cuadro 1: Formas del campo eléctrico para distintas distribuciones continuas de carga

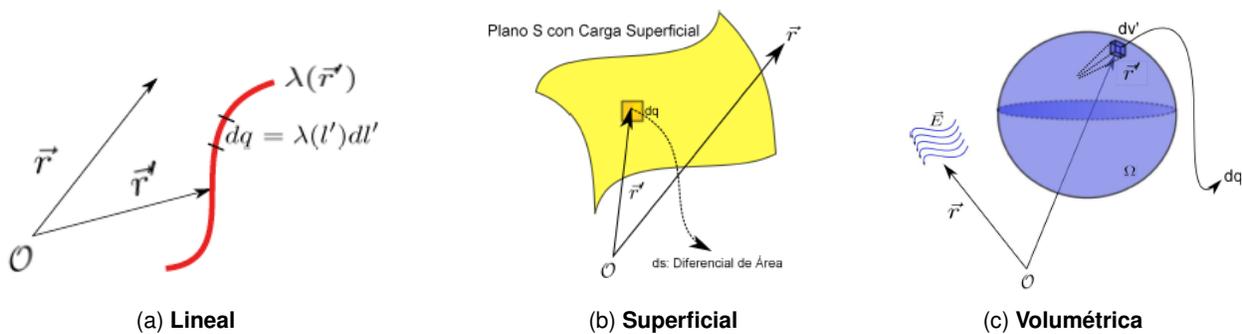


Figura 3: Representación de distribuciones continuas de cargas

1.3. Ley de Gauss

La Ley de Gauss será muy importante para el estudio del electromagnetismo, y se debe ejercitar bastante para comprender bien como funciona y no equivocarse. Principalmente, se utiliza en los casos donde el cuerpo que se estudia posee simetría, y se pueda inferir que el campo eléctrico que se busca es de la forma $\vec{E} = \vec{E}(r)$. Ejemplos clásicos donde se utiliza la Ley de Gauss, son esferas y cilindros (cada caso debe analizarse con cuidado).

Para iniciarse en la aplicación de la Ley de Gauss, se debe conocer con anterioridad el concepto de flujo.

Se define el **flujo** ψ de \vec{A} a través de una superficie S como, la siguiente integral de superficie:

$$\psi = \int \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int \int_S \vec{A} \cdot ds \cdot \hat{n}$$

Otra ayuda importante corresponde al **Teorema de la divergencia**, que establece lo siguiente:

$$\int \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{A} dv$$

Con lo anterior, podemos encontrar una relación para el campo eléctrico.

$$\Psi = \int \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

En ocasiones puede ser útil también, el **Teorema de Stokes**:

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int \int_S \nabla \times \vec{A} ds$$

1.3.1. Ley de Gauss

En palabras simples, la ley de Gauss nos dice que el flujo de campo eléctrico que pasa por una superficie cerrada S , es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_{total}) dividida por la constante ϵ_0 .

$$\Psi = \int \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0}$$

1.4. El Potencial Eléctrico

En ciertos casos, será más fácil utilizar el concepto de potencial eléctrico para obtener una expresión para el campo eléctrico. Se define el potencial eléctrico asociado a una carga q en la posición \vec{r}' como:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [V]$$

El potencial eléctrico también cumple con superposición, por lo que se tiene que:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'_i|} = \sum_{i=1}^n V_i$$

1.4.1. Potencial Eléctrico para distribuciones continuas de carga

De manera idéntica al campo eléctrico, puede encontrarse el potencial eléctrico para distintas distribuciones continuas de carga: lineales, superficiales y volumétricas.

Tipo	Densidad de carga	Elemento Diferencial de carga	Expresión final del potencial eléctrico
Lineal	$\lambda(\vec{r}') [\frac{C}{m}]$	$dq = \lambda(\vec{r}') dl'$	$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\lambda(\vec{r}')}{\ \vec{r} - \vec{r}'\ } dl'$
Superficial	$\sigma(\vec{r}') [\frac{C}{m^2}]$	$dq = \sigma(\vec{r}') ds$	$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int_{\tau} \frac{\sigma(\vec{r}')}{\ \vec{r} - \vec{r}'\ } ds'$
Volumétrica	$\rho(\vec{r}') [\frac{C}{m^3}]$	$dq = \rho(\vec{r}') dv$	$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}')}{\ \vec{r} - \vec{r}'\ } dv'$

Cuadro 2: Formas del potencial eléctrico para distintas distribuciones continuas de carga

1.4.2. Trabajo de un campo eléctrico

Sabemos que $\vec{F} = q\vec{E}$. También se tiene que $dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$, si dW positivo, el trabajo lo hace el agente externo, si dW es negativo, el trabajo lo realiza el campo eléctrico.

Entonces, $dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$, integramos de A (punto inicial) a B (punto final).

$$\Rightarrow W = \int_A^B dW = \int_A^B -\vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

1.4.3. Diferencia de potencial

Una vez teniendo W , si se divide por q , se llega al trabajo por unidad de carga, o también llamado, energía por unidad de carga. A esa cantidad, se le denomina *Diferencia de potencial* entre los puntos B(final) y A(inicial), se denota V_{BA} .

$$V_{BA} = V_B - V_A [V] = \frac{W}{q} [J \setminus C] = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

1.4.4. La diferencia de potencial y una mirada más general al potencial eléctrico

Teniendo que...

$$V_{BA} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se tiene que $B = r$ (variable) y que $A = r_{ref}$, se llega a que...

$$V(r) = - \int_r^{r_{ref}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$

Una vez obtenida esta expresión, es posible darse cuenta de lo conveniente que resultaría si $V_{ref} = 0$, para así obtener el campo eléctrico, es por este motivo que la idea ahora será hacer un pequeño "truco" (que requiere ejercitar bastante), que consiste en dejar $V_{ref} = 0$. Con esto, el término que sobra se nos va y queda muchísimo más fácil obtener el potencial y con ello también, el campo eléctrico, según sea el caso.

Entonces, recapitulando, lo clave está en fijar una "referencia conveniente" de tal modo que el potencial eléctrico en ese punto valga cero. Generalmente se utiliza el infinito, pero depende del caso a estudiar.

1.4.5. La estrecha relación entre Potencial eléctrico y Campo eléctrico

Podemos decir, que si se tiene el potencial eléctrico se obtiene el campo, y también viceversa, pero ¿Por qué?. De lo anterior y con un poco de álgebra, se puede llegar a la siguiente identidad, muy importante y útil.

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Es decir, el campo eléctrico se puede obtener calculando el gradiente de la función potencial.

IMPORTANTE: Se debe ser bastante cuidadoso con las coordenadas en las que se obtiene el potencial para después calcular su gradiente, pues generalmente, no es lo mismo el gradiente de una función en coordenadas esféricas que en cilíndricas. Asimismo, recalcar, que al calcular gradiente de una función, se obtiene un vector (en este caso, el vector campo eléctrico).

1.5. Primera Ley de Maxwell(en el vacío)

Partiendo de la ley de Gauss, y usando el teorema de la divergencia es posible llegar a una relación muy útil, conocida como Primera ley de Maxwell.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ordenando los términos, llegamos a ...

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho$$

Usualmente, es conveniente definir el vector $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ como *Vector Desplazamiento*, con esto, la primera ley Maxwell queda como sigue:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Observación: Esto para el vacío, pues aquí es donde se cumple que $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

1.6. El campo eléctrico como un campo conservativo

A partir de $\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$, es posible obtener la siguiente identidad: $\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$. Con esto, se deduce que el campo eléctrico es conservativo.

Observaciones importantes:

- La conclusión de que el campo eléctrico es un campo conservativo, es aplicable solamente a situaciones de electrostática.
- También se puede obtener otra propiedad importante, ésta es que el trabajo neto realizado por el campo eléctrico es nulo cuando se considera una trayectoria cerrada, es decir, la fuerza que proviene de un campo eléctrico (en electrostática) es una fuerza conservativa.

1.7. El Dipolo eléctrico o momento dipolar

Un dipolo eléctrico corresponde a un sistema de dos cargas iguales pero de signo contrario, éstas se encuentran unidas por algún medio (no es relevante saber como XD), y se mantienen a una distancia d constante entre ellas, ver Figura 4.

Se define el dipolo o momento dipolar como $\vec{p} = qd \hat{r}$,

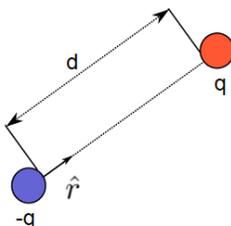


Figura 4: El dipolo eléctrico

Importante:

- La suma neta de las cargas de un dipolo debe ser nula.
- El vector apunta desde la carga negativa hacia la carga positiva.
- Las unidades de un dipolo o momento dipolar son $[C \cdot m]$.

1.7.1. Potencial eléctrico de un Dipolo

Cuando un dipolo se encuentra en un punto cualquiera, y sea \vec{r}' el vector que indica la posición del punto medio del dipolo, como en la Figura 5.

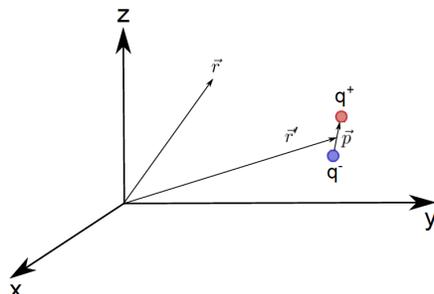


Figura 5: El dipolo eléctrico en un punto cualquiera

Se puede escribir el potencial eléctrico de un dipolo como sigue:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r} - \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Importante:

- Para calcular el campo eléctrico de un dipolo, se puede hacer uso de la relación $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$

1.7.2. Dipolo de un conjunto de cargas y distribuciones

El dipolo es posible definirlo para muchas cargas y distribuciones continuas de las mismas, siempre recordando que se debe cumplir $\sum_{i=1}^n q_i = 0$

Luego, el dipolo para un conjunto de cargas se escribe como:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i$$

Importante:

- Es posible ver que para $n=2$, se cumple :

$$\vec{p} = q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2, \text{ pero como } q_1 = -q_2 \Rightarrow \vec{p} = Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = Q\vec{d}.$$

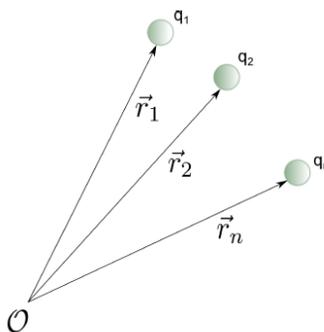


Figura 6: Dipolo de un conjunto de cargas

1.8. Técnicas especiales: Ecuación de Laplace y Poisson

Para ocupar estas "técnicas" se debe contar con condiciones de borde y saber resolver EDO's . Por lo general, estos métodos facilitan bastante el camino para lograr determinar el campo eléctrico.

Se tiene entonces la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Sin embargo, cuando no hay carga, se tiene la Ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Importante:

- Nuevamente, es importante no confundirse entre las diferentes coordenadas que se utilizan al momento de resolver el problema.
- Sin condiciones de borde, es muy complicado (imposible) resolver un problema usando estas técnicas.
- Los pasos a seguir para usar estas técnicas son:
Primero, resolver la EDO y encontrar el potencial, para más tarde usar la identidad $\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$ y así encontrar el campo eléctrico (CUIDADO con el signo -).

Fin de Electrostatica