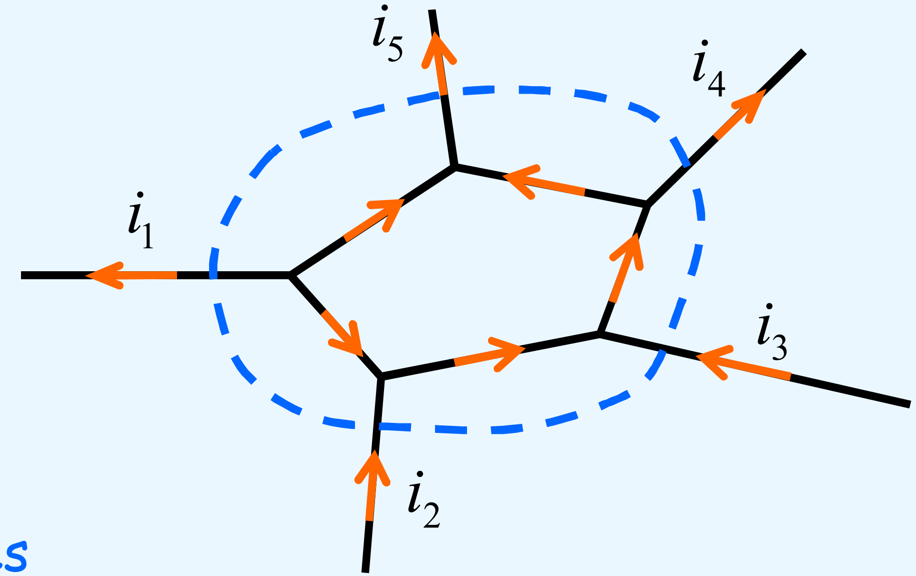
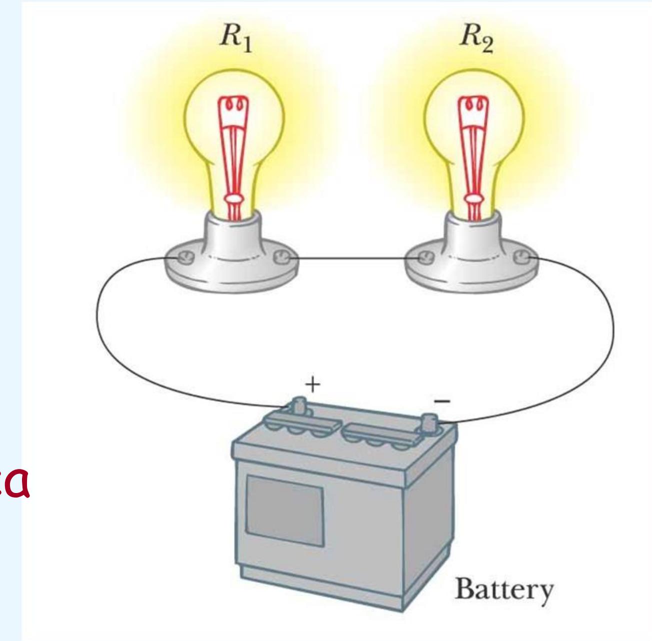
Tema 1. Conceptos Básicos de la Teoría de Circuitos



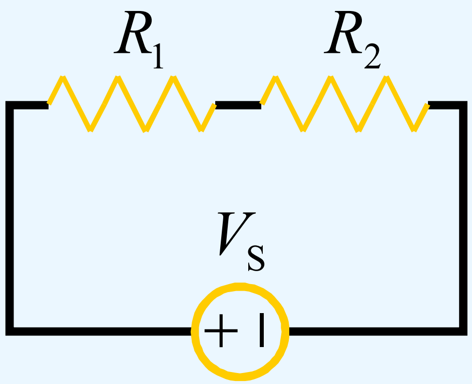
1.1 Introducción



- Un circuito eléctrico es una interconexión de elementos eléctricos

- El circuito de la figura está formado por:

  * Batería: suministra energía eléctrica
  * Bombillas: transforman la energía eléctrica en luz y calor
  * Cables: conectan los elementos entre sí



- Para estudiar un circuito real es necesario aproximarlo por un modelo matemático más sencillo.

1.1 Introducción

- La Teoría de Circuitos es un caso particular (aproximación) de la Teoría Electromagnética

- La aproximación se basa en suponer que el tamaño físico del circuito es mucho menor que la longitud de onda de las señales presentes en él

- En realidad, supondremos que los circuitos no tienen dimensión física

$$\Downarrow$$

Circuitos de Parámetros Concentrados

- En general, el comportamiento de un circuito viene descrito por un conjunto de ecs. diferenciales

$$\Downarrow$$

Esto permite establecer analogías entre el comportamiento de los circuitos y de otros sistemas físicos

1.2 Sistema de unidades

- Definición de magnitud física:

"La Oficina Internacional de Pesas y Medidas define la magnitud física como un atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que puede ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente"

- Magnitudes escalares:

  Se determinan completamente con un solo valor escalar

  Ej.: masa, temperatura, carga eléctrica, etc.

- Magnitudes vectoriales:

  Se determinan completamente con 2 valores: Módulo y Dirección

  Ej.: Fuerza , velocidad, campo eléctrico, etc.

1.2 Sistema de unidades

- Unidades fundamentales del Sistema Internacional (SI)

Tabla 1.1: Las unidades básicas del SI

Cantidad	Unidad básica	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd

1.2 Sistema de unidades

- Prefijos del Sistema Internacional (SI):

  - Prefijos más usados en el ámbito de la ingeniería

Multiplicador	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

1.3 Carga y corriente

- Concepto de carga eléctrica:

  "Propiedad intrínseca de las partículas subatómicas"

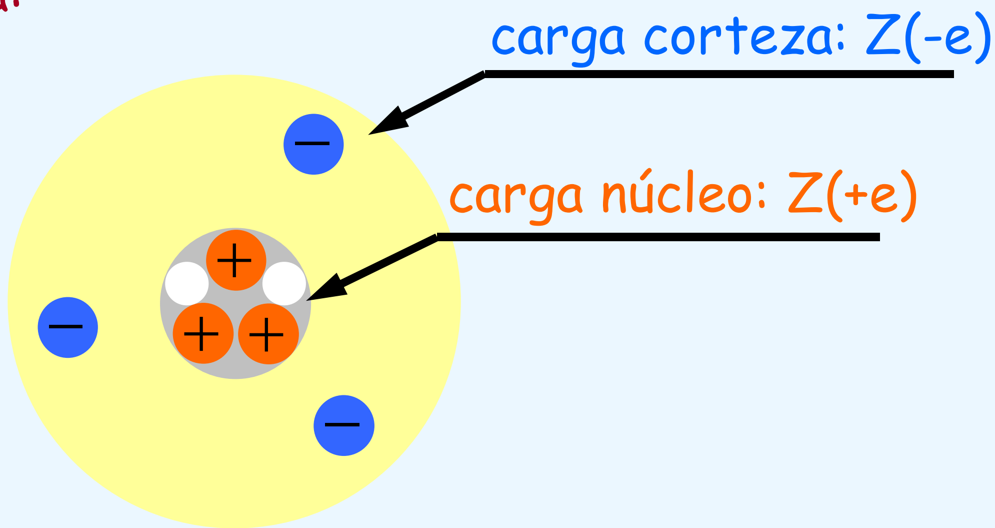
  1. Protón: carga +e $\longrightarrow$ $\oplus$
  2. Electrón: carga -e $\longrightarrow$ $\ominus$

  e $\longrightarrow$ unidad fundamental de la carga eléctrica

- Constitución de la materia:

  átomo = núcleo + corteza

  Z: número atómico



$$-eZ + eZ = 0$$

$\downarrow$

¡¡ El átomo es neutro !!

$\longrightarrow$ ¡¡ El universo es neutro !!

1.3 Carga y corriente

- Cuantización de la carga:

  "Cualquier carga Q es múltiplo entero de e" $\longrightarrow$ $Q = \pm Ne$

- Conservación de la carga:

  "En cualquier proceso físico o químico la carga total se conserva"

- Unidades de la carga: El culombio (C)

  Es una unidad derivada:

  $$1\,\text{culombio} = 1\,\text{amperio} \times 1\,\text{segundo} \longrightarrow 1\,\text{C} = 1\,\text{A} \times 1\,\text{s}$$

- Valor de "e" en culombios:

$$\boxed{e = 1.602177 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$

1.3 Carga y corriente

- Conductores:

  "Son materiales en los cuales parte de los electrones son capaces de moverse libremente"

  Ej.: metales

- Aislantes:

  "Son materiales en los cuales todos los electrones están ligados a los átomos y no pueden moverse libremente"

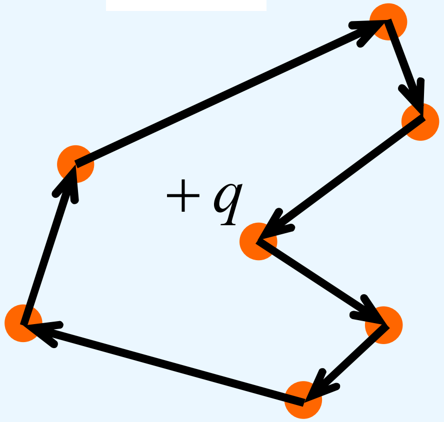
  Ej.: madera, plástico, vidrio, etc.

1.3 Carga y corriente

- Proceso físico de la conducción eléctrica en metales:

a) Campo eléctrico aplicado nulo:

$\vec{E} = 0$



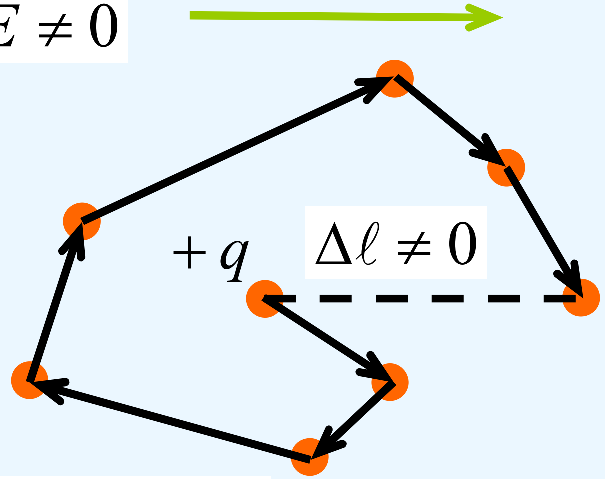
Vel. instantánea: $v_i \approx 10^6 \quad \text{m/s}$

Desplazamiento medio: $\Delta\ell = 0$

Velocidad media: $v = \dfrac{\Delta\ell}{\Delta t} = 0$

b) Campo eléctrico aplicado NO nulo:

$\vec{E} \neq 0$



$v = \dfrac{\Delta\ell}{\Delta t} \neq 0$

$$\boxed{\vec{v} = \mu_p \vec{E}}$$

μ_p → Movilidad de los portadores

$\vec{v}$ → Velocidad media, de arrastre o de deriva

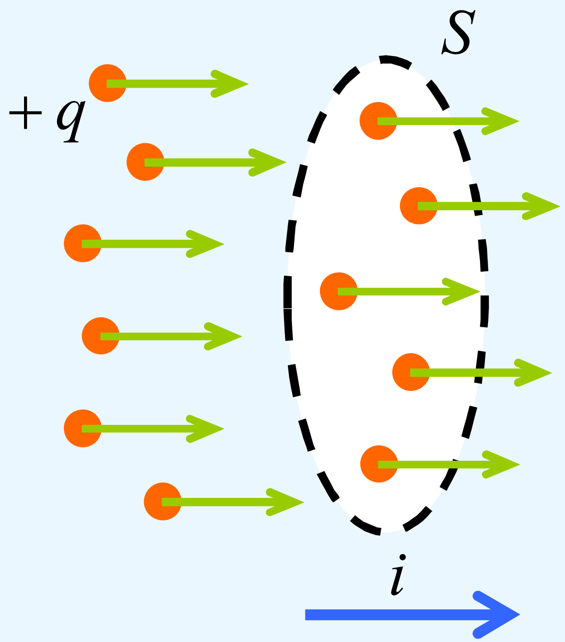
$v << v_i$

1.3 Carga y corriente

- Definición de intensidad de corriente eléctrica:

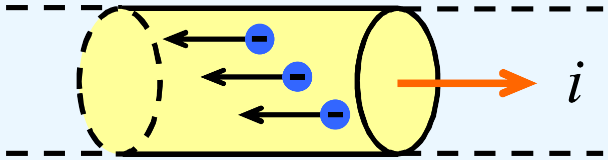
> "La intensidad de corriente eléctrica, o simplemente corriente eléctrica, se define como la cantidad de carga eléctrica que atraviesa una superficie por unidad de tiempo"

$$\boxed{i = \left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|_S}$$



1.3 Carga y corriente

- Dirección de la corriente: por convenio, se considera que la dirección de *i* es la correspondiente al flujo de cargas positivas (los electrones se mueven en dirección opuesta a la dirección de la corriente)

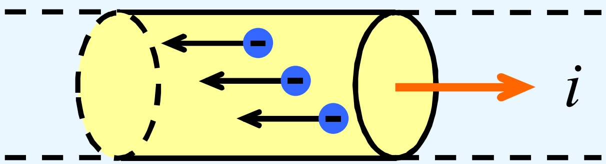


- Unidades de la corriente: El amperio (A)

- En el SI la corriente es una magnitud fundamental, mientras que la carga no lo es, ya que deriva de la corriente y del tiempo.

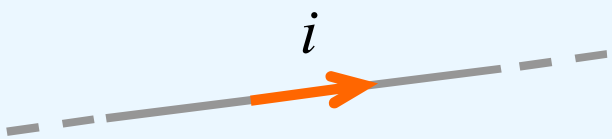
* Corrientes volúmicas:

- "Los electrones viajan por todo el volumen del conductor"



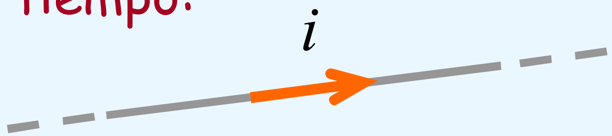
* Corrientes filiformes:

- "Son corrientes que viajan por líneas geométricas"
- Es una idealización que se usa en la teoría de circuitos.



1.3 Carga y corriente

* Carga total transferida en un intervalo de tiempo:



$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = i\,dt$$

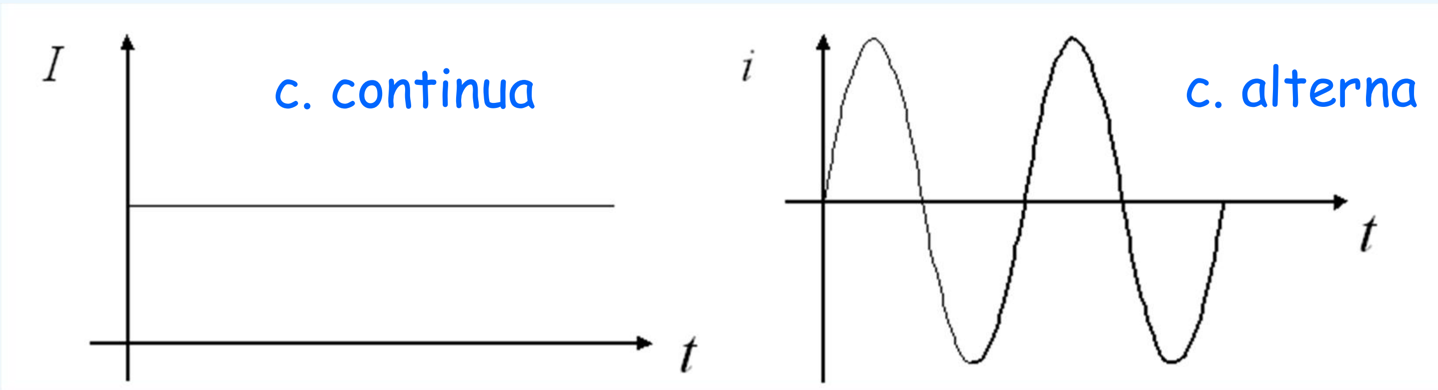
$$\int_{t_i}^{t_f} dq = \int_{t_i}^{t_f} i\,dt \Rightarrow Q = \int_{t_i}^{t_f} i\,dt$$

$$\boxed{Q = \int_{t_i}^{t_f} i\,dt}$$

* En general la corriente es función del tiempo $i = i(t)$

- Corriente de continua o corriente directa (dc): no varía con el tiempo. Se denota mediante el símbolo I

- Corriente de alterna (ac): varía sinusoidalmente con el tiempo



- Ejemplo 1: Calcular la carga total que entra por un terminal entre los instantes $t = 1$ s y $t = 2$ s si la corriente que pasa es $i = (3t^2 - t)$ A.

<u>Solución:</u>

- Según acabamos de ver: $Q = \int_{t_i}^{t_f} i \, \mathrm{d}t$

- En este ejemplo $t_i = 1\,\mathrm{s}$ $\quad t_f = 2\,\mathrm{s}$ $\quad i = \left(3t^2 - \mathrm{t}\right)\,\mathrm{A}$

- Luego:

$$\boxed{Q = \int_1^2 \left(3t^2 - t\right)\mathrm{d}t = \left(t^3 - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(2^3 - \frac{2^2}{2}\right) - \left(1^3 - \frac{1^2}{2}\right) = 5.5\,\mathrm{C}}$$

integramos

evaluamos en los límites

1.4 Tensión

- Definición de tensión entre dos puntos A y B:
  - Para mover un electrón es necesario aportar energía (realizar trabajo
  - Esta energía la dan las fuentes o generadores del circuito

"La tensión (o diferencia de potencial) v_{AB} entre dos puntos A y B de un circuito es la energía necesaria para mover una carga de valor unidad desde A hasta B"

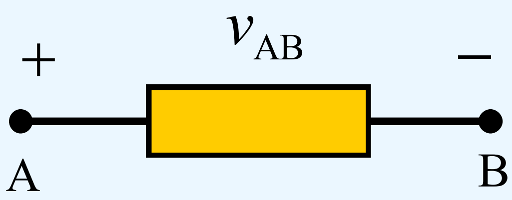
- Matemáticamente: $$\boxed{v_{AB} = \frac{dw}{dq}}$$

- Unidades de la tensión: El voltio (V)

$$1 \text{ voltio} = \frac{1 \text{ julio}}{1 \text{ culombio}} \longrightarrow 1\text{ V} = \frac{1\text{ J}}{1\text{ C}}$$

1.4 Tensión

- <u>Tensión entre los terminales de un elemento:</u>

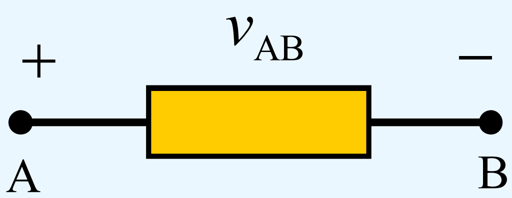


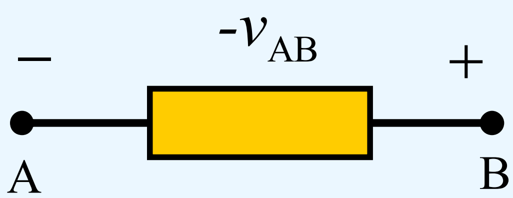
- Los signos + y – indican la polaridad de la tensión

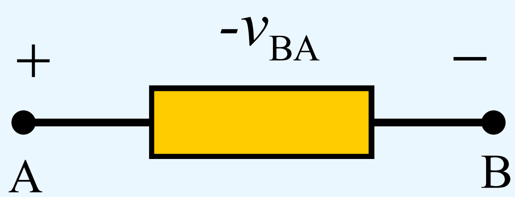
- El punto A está a un potencial v_{AB} voltios mayor que el punto B

- Se dice que hay una caída de tensión de v_{AB} voltios de A hasta B

- Las siguientes figuras son equivalentes







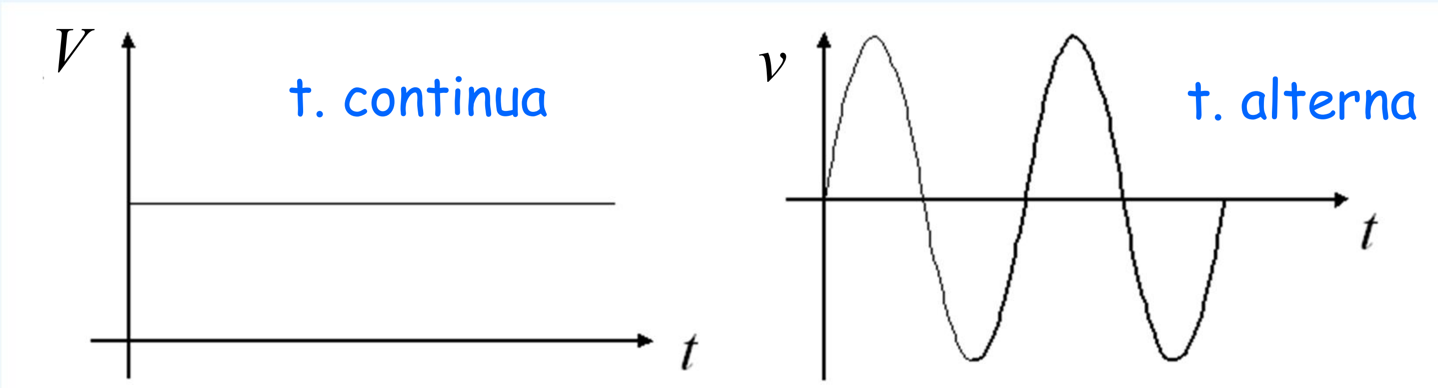
$$v_{AB} = -v_{BA}$$

1.4 Tensión

- En general la tensión es función del tiempo $v = v(t)$

  - Tensión de continua: no varía con el tiempo. Se denota mediante el símbolo V

  - Tensión de alterna: varía sinusoidalmente con el tiempo



1.5 Potencia y energía

- Definición de potencia:

  - Los cálculos de potencia y energía son importantes en el análisis de circuitos

> "La potencia p es la cantidad de energía (absorbida o suministrada) por unidad de tiempo"

- Matemáticamente:

$$\boxed{p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}}$$

1.5 Potencia y energía

- Potencia (absorbida o suministrada) por un elemento de circuito:

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq}\frac{dq}{dt} \rightarrow \boxed{p = vi}$$

"La potencia absorbida o suministrada por un elemento es el producto de la tensión entre los extremos del elemento por la corriente que pasa a través de él"

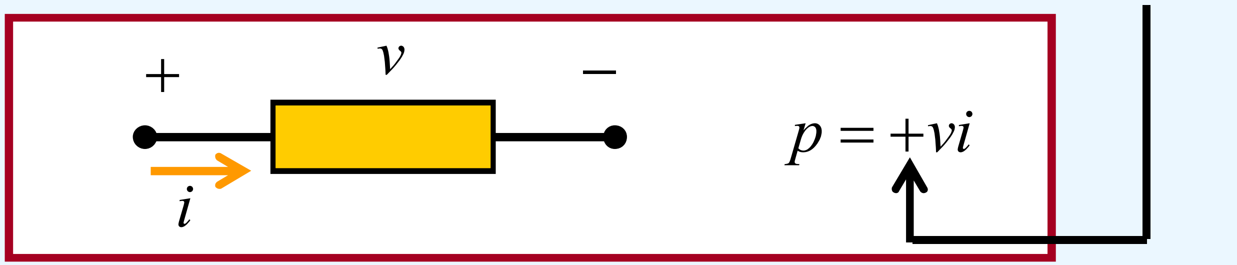
- Unidades de la potencia: El vatio (W)

- De la expresión anterior se deduce: $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{V} \times 1\,\mathrm{A}$

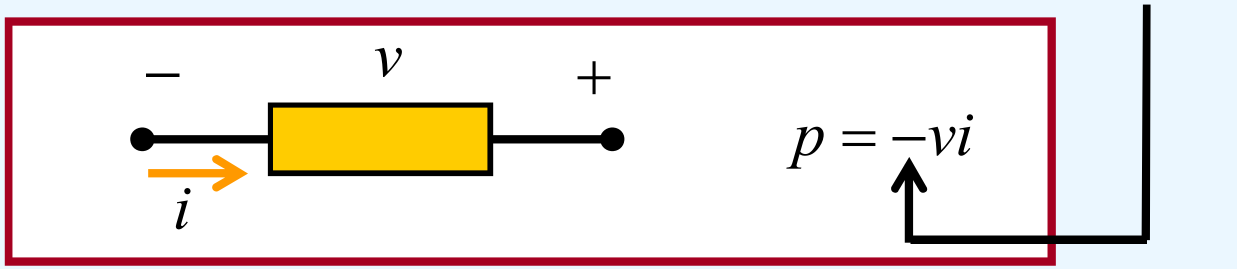
1.5 Potencia y energía

- Cálculo de la potencia en un elemento de circuito:

  - 1er caso: La corriente entra por el terminal positivo



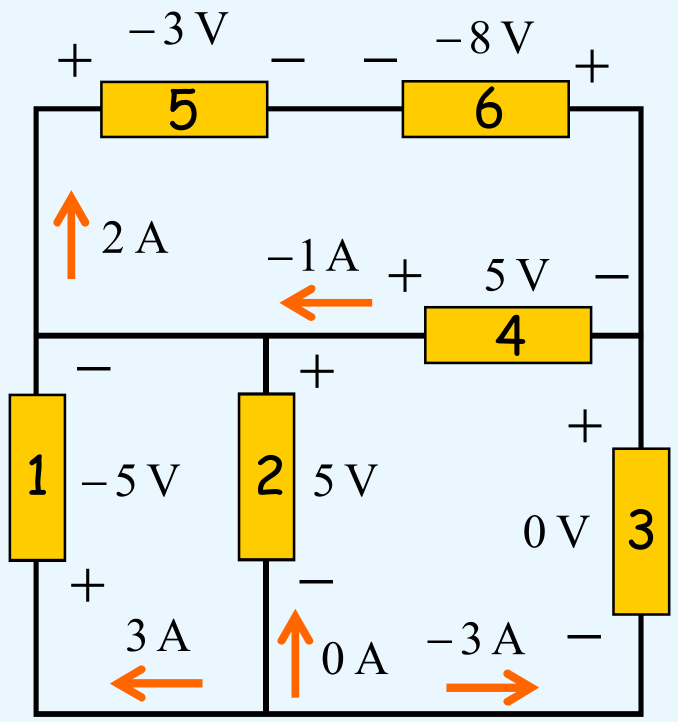
  - 2° caso: La corriente entra por el terminal negativo



  - En ambos casos:
    - Si $p > 0$ → el elemento disipa potencia
    - Si $p < 0$ → el elemento suministra potencia

  - En el 1er caso se dice que "se cumple el convenio pasivo de signos"

- Ejemplo 2: Calcular la potencia en cada elemento del circuito de la figura indicando si es potencia suministrada o consumida



Solución:

- Potencia en un elemento $\begin{cases} p = +vi & \text{si la corriente entra por +} \\ p = -vi & \text{si la corriente entra por -} \end{cases}$

- Elemento 1: $V_1 = -5\ \text{V} \quad I_1 = 3\ \text{A} \longrightarrow P_1 = +V_1 I_1 = +(-5)\times 3 = -15\ \text{W} < 0$ (suministra)

- Elemento 2: $V_2 = 5\ \text{V} \quad I_2 = 0\ \text{A} \longrightarrow P_2 = -V_2 I_2 = -5\times 0 = 0\ \text{W}$

- Elemento 3: $V_3 = 0\ \text{V} \quad I_3 = -3\ \text{A}$

  $P_3 = -V_3 I_3 = -0\times(-3) = 0\ \text{W}$

- Elemento 4: $V_4 = 5\ \text{V} \quad I_4 = -1\ \text{A}$

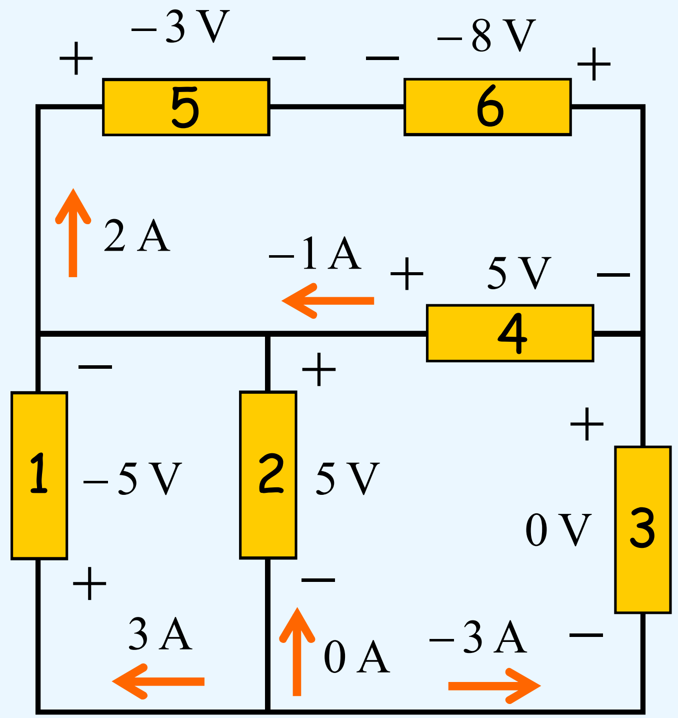
  $P_4 = -V_4 I_4 = -5\times(-1) = 5\ \text{W} > 0$ (consume)

- Elemento 5: $V_5 = -3\ \text{V} \quad I_5 = 2\ \text{A}$

  $P_5 = +V_5 I_5 = (-3)\times 2 = -6\ \text{W} < 0$ (suministra)

- Elemento 6: $V_6 = -8\ \text{V} \quad I_6 = 2\ \text{A}$

  $P_6 = -V_6 I_6 = -(-8)\times 2 = 16\ \text{W} > 0$ (consume)



- Total potencia suministrada = -21 W

- Total potencia consumida = +21 W

1.5 Potencia y energía

- Ley de conservación de la energía para un circuito eléctrico:

"La suma algebraica de la potencia en un circuito eléctrico debe ser cero, en cualquier instante de tiempo"

- Matemáticamente:

$$\boxed{\sum_n p_n = 0}$$

$$\boxed{p_{\text{absorbida}} + p_{\text{suministrada}} = 0}$$

$$p_{\text{absorbida}} > 0$$

$$p_{\text{suministrada}} < 0$$

1.5 Potencia y energía

- Cálculo de energía absorbida o suministrada en un intervalo de tiempo:

$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}w = p\mathrm{d}t$$

- Integrando: $$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}w = \int_{t_1}^{t_2} p\,\mathrm{d}t \Rightarrow w = \int_{t_1}^{t_2} vi\,\mathrm{d}t$$

- Unidades de la energía (SI): El julio (J)

$$1\ \text{julio} = 1\ \text{vatio} \times 1\ \text{segundo} \longrightarrow 1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{W} \times 1\ \mathrm{s}$$

- En la vida cotidiana (recibo de la luz) es usual emplear como unidad de energía el vatio-hora (Wh)

$$1\ \mathrm{Wh} = 1\ \mathrm{W} \times 3600\ \mathrm{s} = 3600\ \mathrm{J}$$

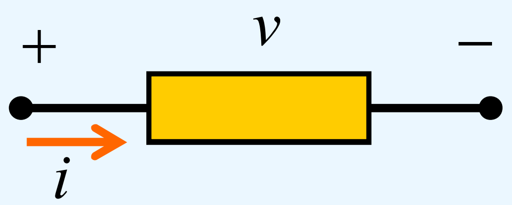
1.6 Ley de Ohm

- Elementos activos y pasivos:

"Un elemento es pasivo si siempre (en cualquier instante de tiempo) absorbe energía del resto del circuito"

- Ejemplos: resistencias, condensadores y bobinas

$$w = \int_{-\infty}^{t} v i \, \mathrm{d}t \geq 0 \quad \forall t$$



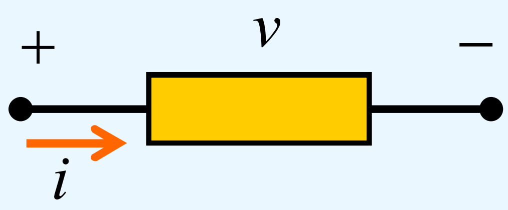
"Un elemento es activo si es capaz de suministrar energía al resto del circuito en algún instante de tiempo"

- Ejemplos: baterías y generadores

1.6 Ley de Ohm

- Característica i-v de un elemento:

> "La característica i-v de un elemento es la relación entre la corriente que lo atraviesa y la tensión entre sus terminales"



- Característica i-v ….:
  - Cada tipo de elemento tiene una propia
  - En general, es una relación no lineal
  - Se expresa en forma de ecuación o de gráfica
  - Determina el comportamiento de un elemento dentro de un circuito

1.6 Ley de Ohm

- Definición de resistividad:

> "La resistividad ρ de un material es la capacidad para oponerse al desplazamiento de carga a través de él"

- Los buenos aislantes tienen resistividades altas, mientras que los buenos conductores las tienen bajas

- El inverso de la resistividad se denomina conductividad σ

$$\sigma = 1/\rho$$

1.6 Ley de Ohm

- Tabla de resistividades

Material	Resistividad (Ohm m)
Plata	$1.6 \quad 10^{-8}$
Cobre	$1.7 \quad 10^{-8}$
Aluminio	$2.8 \quad 10^{-8}$
Oro	$2.5 \quad 10^{-8}$
Carbón	$4.0 \quad 10^{-5}$
Germanio	$47 \quad 10^{-2}$
Silicio	$6.4 \quad 10^{+2}$
Papel	$1 \quad 10^{+10}$
Mica	$5 \quad 10^{+11}$
Vidrio	$1 \quad 10^{+12}$
Teflón	$3 \quad 10^{+12}$

Buenos conductores

Semiconductores

Aislantes

1.6 Ley de Ohm

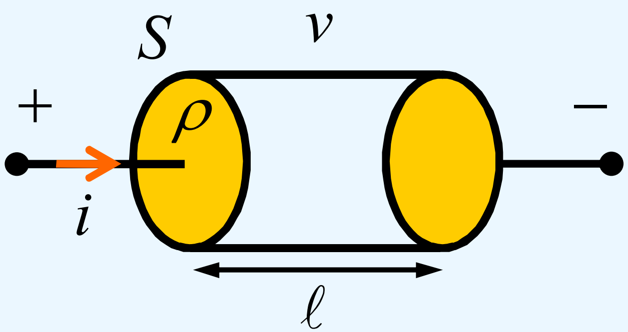
- Ley de Ohm y definición de resistencia:

> "En 1827 el físico alemán Georg S. Ohm determinó experimentalmente que la tensión entre los terminales de un cuerpo resistivo es proporcional a la corriente que lo atraviesa"

- Matemáticamente: $\boxed{v = Ri}$

- La constante de proporcionalidad R se denomina resistencia y vale:

$$\boxed{R = \rho \frac{\ell}{S}}$$

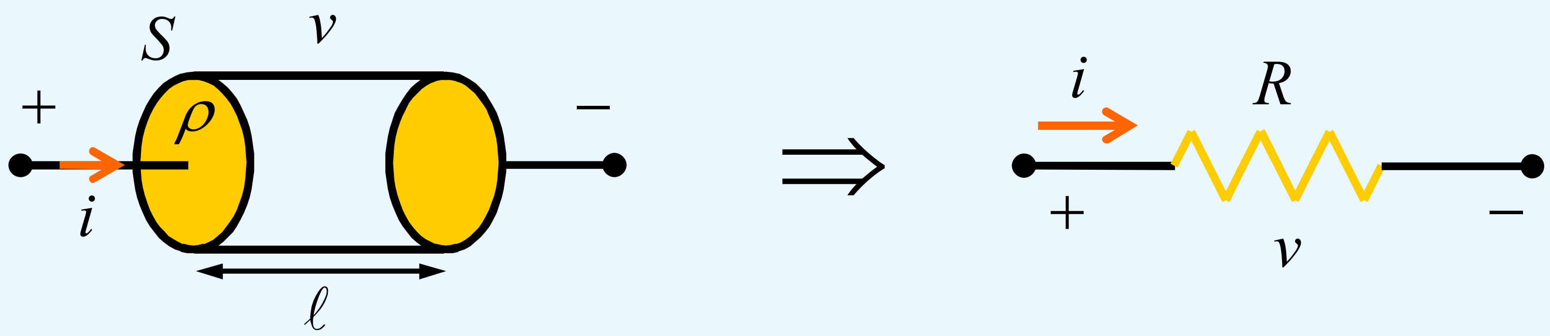


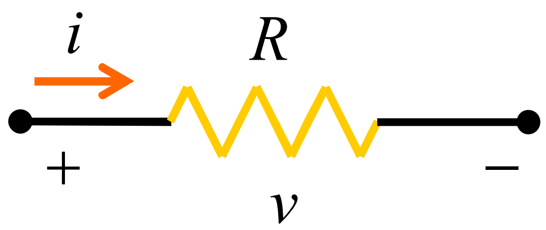
- Unidades de la resistencia: El ohmio (د) $\longrightarrow$ $1\,\Omega = \dfrac{1\,\text{V}}{1\,\text{A}}$

1.6 Ley de Ohm

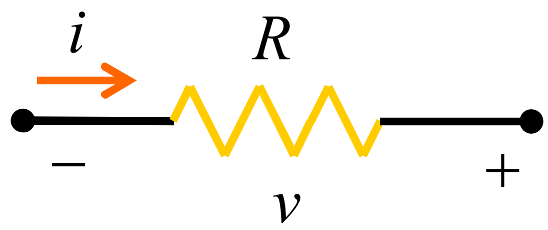
- Ley de Ohm y definición de resistencia:

  - Resistencia como elemento de circuito





$$v = +Ri$$



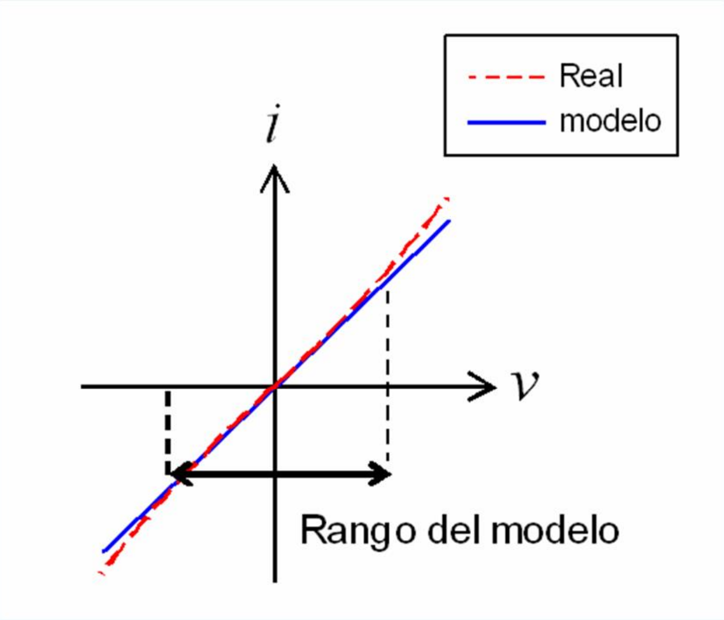
$$v = -Ri$$

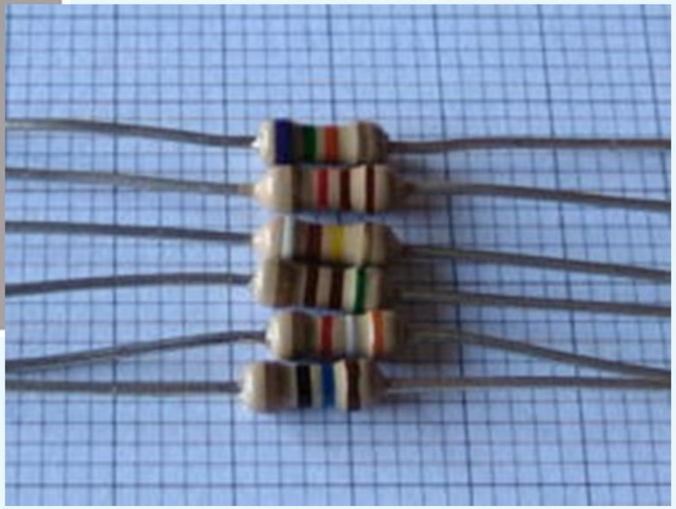
1.6 Ley de Ohm

- Ley de Ohm y definición de resistencia:

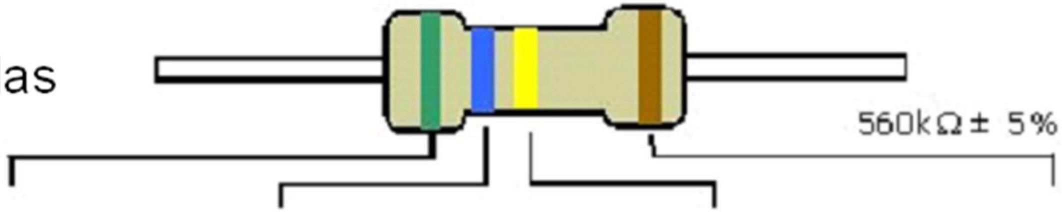
  - La ecuación $v=Ri$ es un modelo (lineal).

  - En realidad, para tensiones altas la relación i-v deja de ser lineal

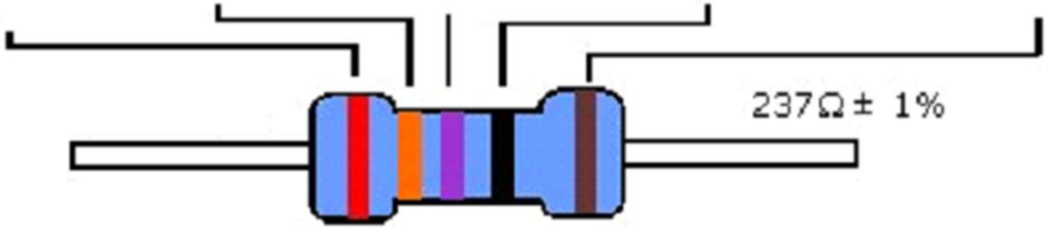




Código de 4 bandas



COLOR	1ª BANDA	2ª BANDA	3ª BANDA	MULTIPLIC	TOLERANCIA
Negro	0	0	0	1 Ω	
Marrón	1	1	1	10Ω	± 1 %
Rojo	2	2	2	100 Ω	± 2 %
Naranja	3	3	3	1K Ω	
Amarillo	4	4	4	10 K Ω	
Verde	5	5	5	100 KΩ	± 0.5 %
Azul	6	6	6	1M Ω	± 0.25 %
Violeta	7	7	7	10 M Ω	± 0.10 %
Gris	8	8	8		± 0.05 %
Blanco	9	9	9		
Dorado				0.1	± 5 %
Plateado				0.01	± 10 %



Código de 5 bandas

1.6 Ley de Ohm

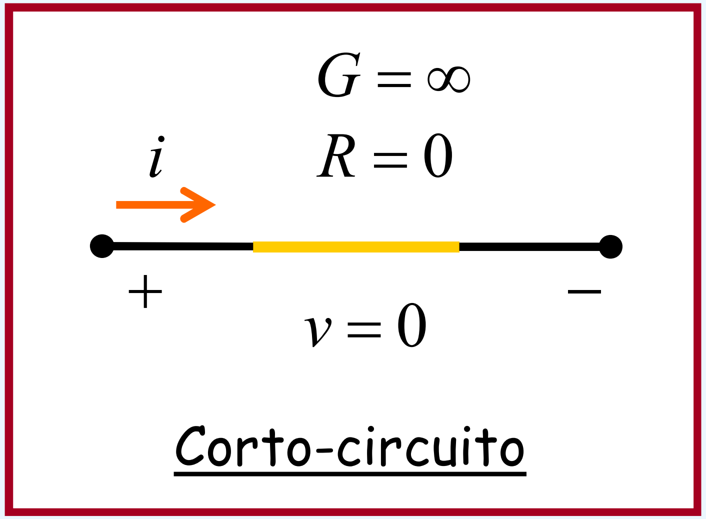
- Ley de Ohm y definición de resistencia:

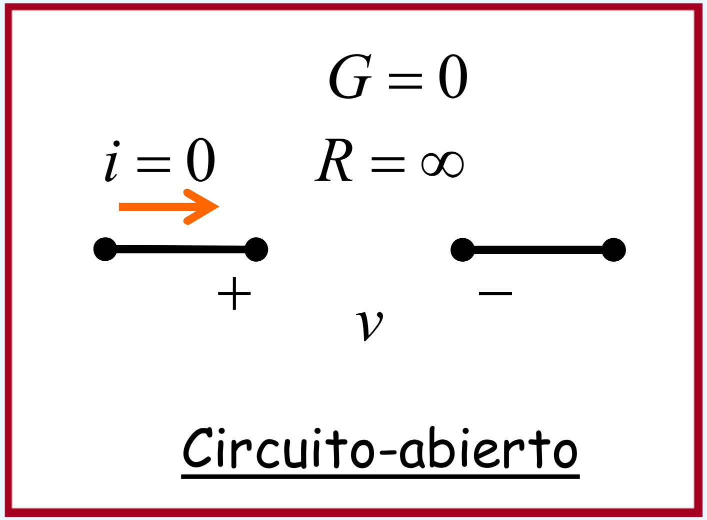
  - El inverso de la resistencia se denomina conductancia G

$$G = 1/R$$

  - Unidades de la conductancia: Siemen (S), también se usa mho

  - Casos límite:

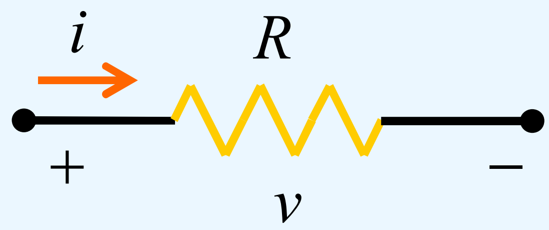




1.6 Ley de Ohm

- Potencia en una resistencia:

$$\left.\begin{aligned} p &= vi \\ v &= Ri \end{aligned}\right\} \qquad p = i^2 R \geq 0$$



- Alternativamente

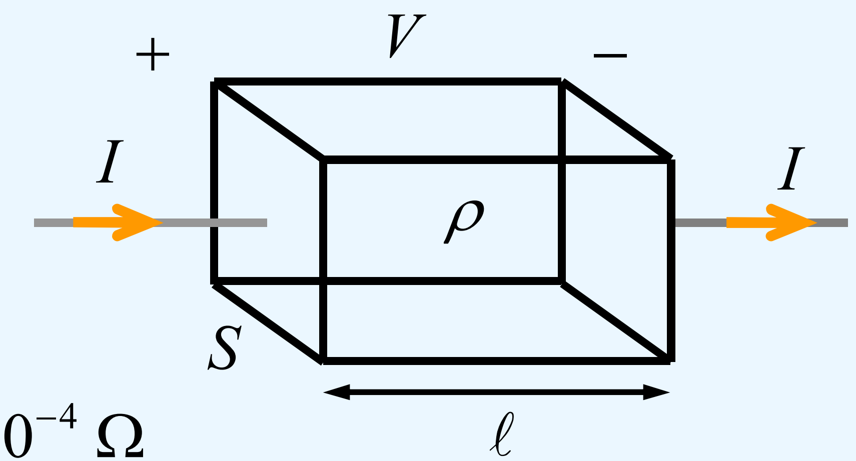
$$p = \frac{v^2}{R}$$

- La resistencia es un elemento pasivo, siempre absorbe (disipa) energía

- En una resistencia la energía eléctrica se transforma en calor

- Ejemplo 3: Se dispone de una pieza de Nicromo (aleación 80% niquel y 20% cromo), de resistividad ρ = 103 x 10^{-6} Ω cm, con forma de paralelepípedo. El área de las bases es S = 2 cm^2 y la longitud ℓ = 5 cm. Sabiendo que la caída de potencial entre las bases es V = 10 V, calcular la potencia y la energía disipada en Δt = 2 h.

<u>Solución:</u>



$$p = \frac{V^2}{R}$$

$$R = \rho\frac{\ell}{S} = \frac{(103\times10^{-6})\times5}{2} = 2.58\times10^{-4}\ \Omega$$

$$p = \frac{V^2}{R} = \frac{10^2}{2.58\times10^{-4}} = 3.88\times10^{5}\ \ \mathrm{W}$$

$$w = p\Delta t = (3.88\times10^{5})\times(2\times60\times60) = 2.79\times10^{9}\ \ \mathrm{J}$$

1.7 Fuentes independientes

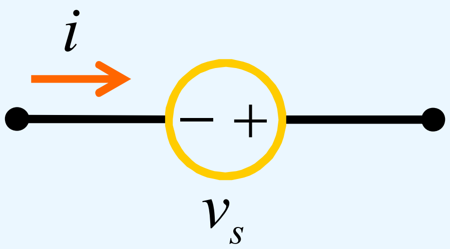
- Las fuentes son elementos activos que, generalmente, suministran energía al circuito al que están conectadas

- Hay dos tipos de fuentes: independientes y dependientes

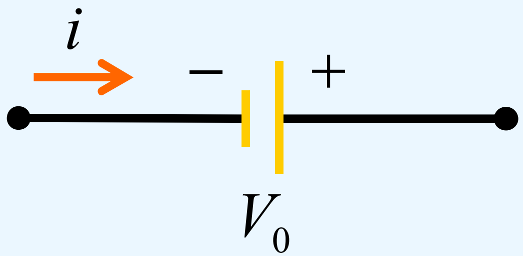
- Las fuentes independientes pueden ser de tensión y de corriente

> "Fuente de tensión ideal: es un elemento que proporciona, entre sus terminales, una tensión prefijada. La corriente que lo atraviesa depende del resto del circuito"

- Símbolos:



fuente de tensión variable con el tiempo

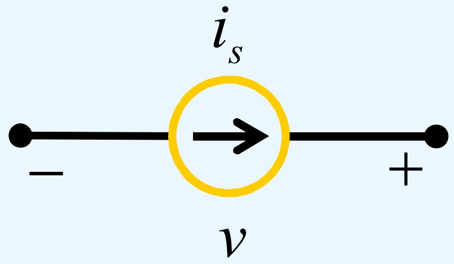


fuente de tensión de continua

1.7 Fuentes independientes

"**Fuente de corriente ideal:** es un elemento que proporciona una corriente prefijada. La tensión entre sus terminales depende del resto del circuito"

- Símbolo:



- Las fuentes también pueden absorber energía!!

- Ejemplo 4: Dos fuentes ideales, una de tensión y otra de corriente, se conectan directamente como se muestra en la figura. Calcular la potencia en cada fuente, indicando si es suministrada o absorbida.

Dorf-7ª P 2.5-3

Solución:

- Fuente de corriente: La corriente entra por el terminal negativo

$$p = -vi = -V_s I_s = -12 \times 3 = -36\ \text{W} < 0\ (\text{suministrada})$$

- Fuente de tensión: La corriente entra por el terminal positivo

$$p = +vi = +V_s I_s = +12 \times 3 = +36\ \text{W} > 0\ (\text{absorbida})$$

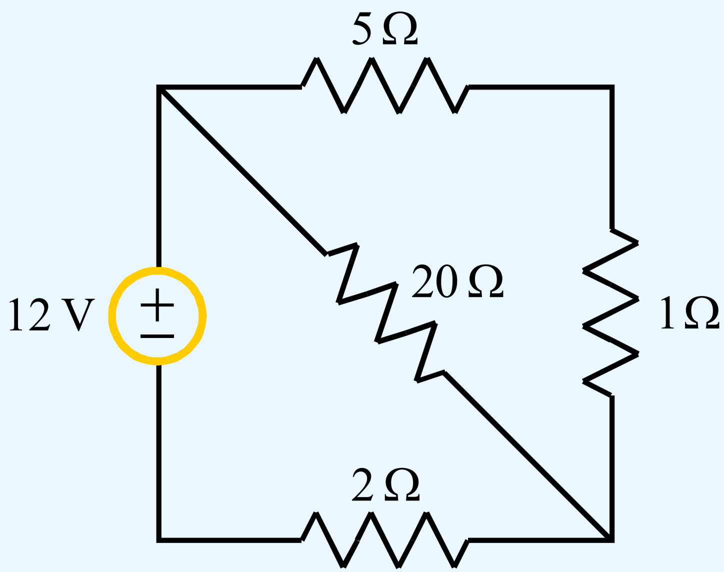
1.8 Leyes de Kirchhoff

- Definición de Nudo y de Malla:

  - Nudo: punto de conexión entre dos o más elementos de circuito

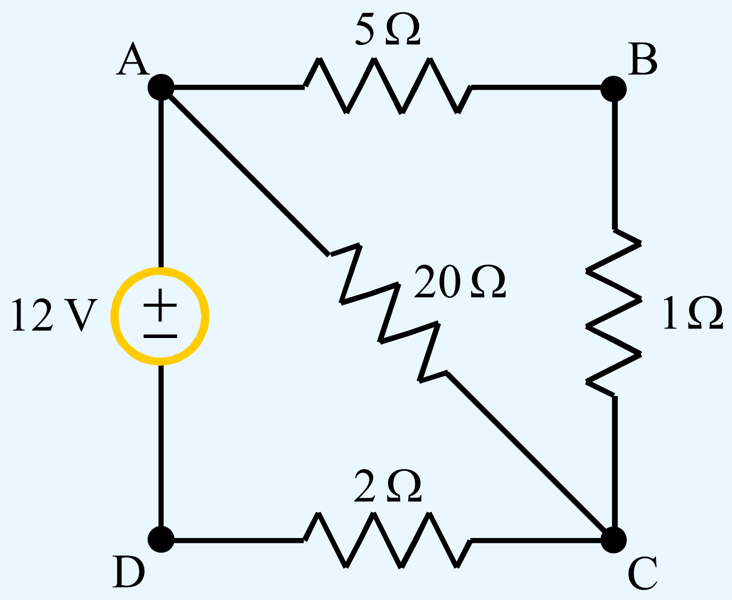
  - Malla: cualquier trayectoria cerrada de un circuito

-Ej: Identificar todos los nudos y mallas del circuito de la figura



Solución:

- Nudo: punto de conexión entre dos o más elementos de circuito
- Hay 4 nudos:
  - Nudo 1: A
  - Nudo 2: B
  - Nudo 3: C
  - Nudo 4: D



- Malla: cualquier trayectoria cerrada de un circuito
- Hay 3 mallas:
  - Malla 1: ABCDA
  - Malla 2: ABCA
  - Malla 3: ACDA

1.8 Leyes de Kirchhoff

- Las leyes de Kirchhoff fueron introducidas en 1847 por el físico alemán Gustav R. Kirchhoff

- Ley de Kirchhoff de las corrientes (KCL):
  - Expresa el principio de conservación de la carga

> "La suma algebraica de las corrientes que entran (o salen) de un nudo es cero"

- Matemáticamente:

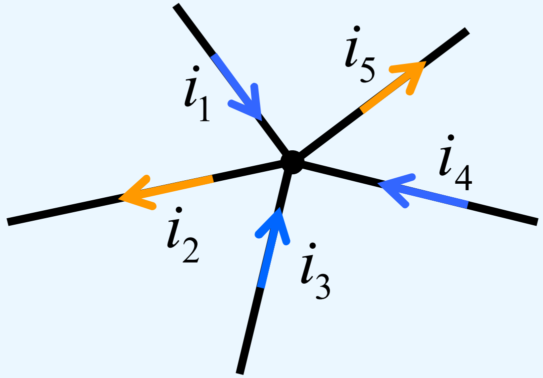
$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} i_n = 0}$$

(las corrientes salientes positivas y las entrantes negativas, o viceversa)

donde N es el número de corrientes que entran/salen del nudo e i_n es la n-ésima corriente

1.8 Leyes de Kirchhoff

- Ley de Kirchhoff de las corrientes (KCL):



-Ej: Aplicar la KCL al nudo de la figura

Solución:

- Hay 5 corrientes → $\sum_{n=1}^{5} i_n = 0$
- Tomamos positivas las corrientes salientes:

$$\sum_{n=1}^{5} i_n = 0 \rightarrow \quad -i_1 + i_2 - i_3 - i_4 + i_5 = 0$$

- También podemos escribir: $i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5$

- Enunciado alternativo de la KCL:

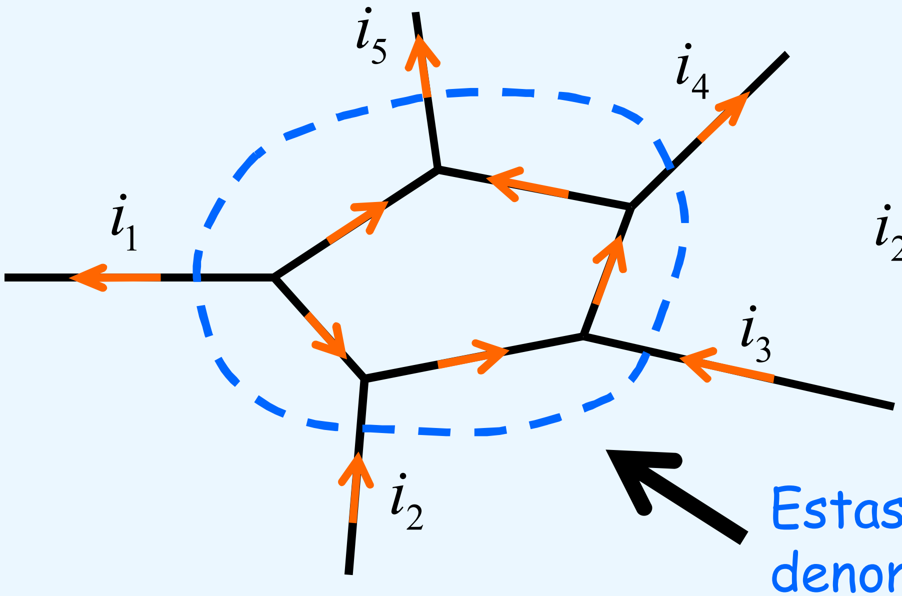
> "La suma de las corrientes que entran en un nudo es igual a la suma de las corrientes que salen de él"

$$\sum i_{\text{entrantes}} = \sum i_{\text{salientes}} \quad \text{(todas positivas)}$$

1.8 Leyes de Kirchhoff

- Ley de Kirchhoff de las corrientes (KCL):

  - La KCL puede generalizarse aplicándose a superficies cerradas (en 2D curvas cerradas)

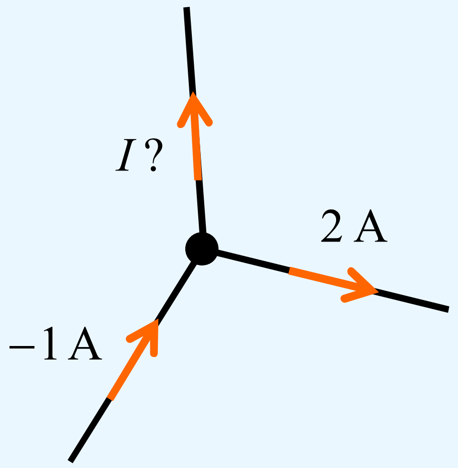


$$i_2 + i_3 = i_1 + i_4 + i_5$$

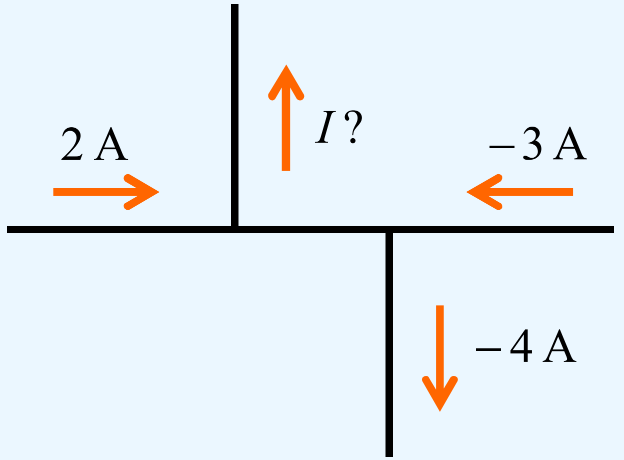
Estas curvas se denominan SUPERNUDOS

  - En un circuito de N nudos, sólo N-1 ecuaciones de nudos son independientes

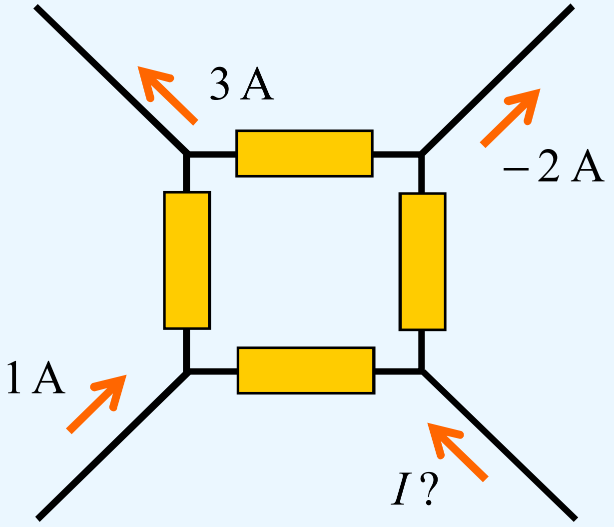
- Ejemplo 5: Calcular las corrientes indicadas en los circuitos de la figura aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes.



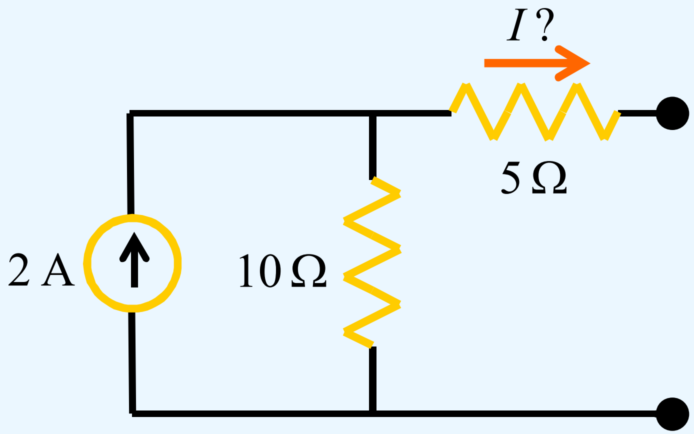
(a)



(b)



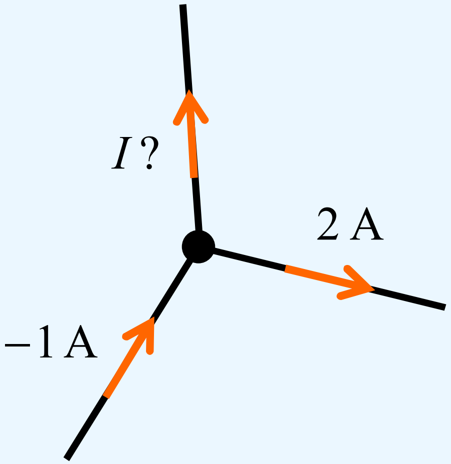
(c)



(d)

Solución:

(a)



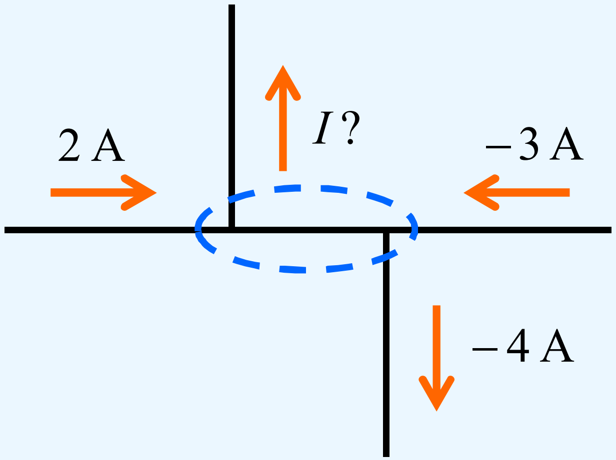
$$\sum i_{\text{entrantes}} = \sum i_{\text{salientes}}$$

$$+(-1) = 2 + I \;\Rightarrow\; I = -3\ \text{A}$$

signo de la ley

signo de la variable

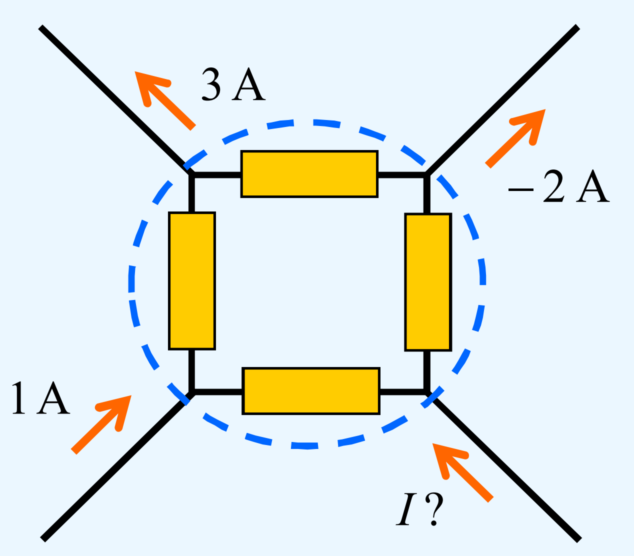
(b)



$$\sum i_{\text{entrantes}} = \sum i_{\text{salientes}}$$

$$2 + (-3) = (-4) + I \;\Rightarrow\; I = 3\ \text{A}$$

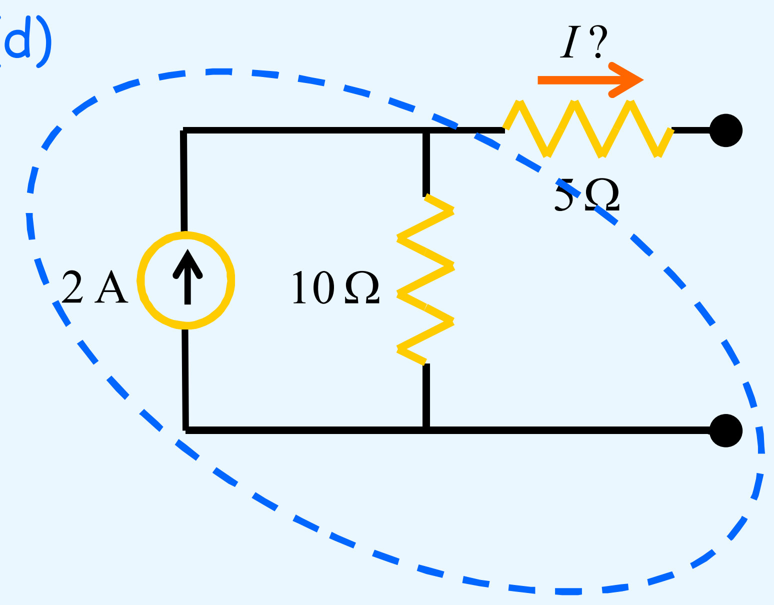
(c)



$$\sum i_{\text{entrantes}} = \sum i_{\text{salientes}}$$

$$1 + I = 3 + (-2) \;\Rightarrow\; I = 0\ \text{A}$$

(d)



$$\sum i_{\text{entrantes}} = \sum i_{\text{salientes}}$$

$$0 = I \;\Rightarrow\; I = 0\ \text{A}$$

1.8 Leyes de Kirchhoff

- Ley de Kirchhoff de las tensiones (KVL):
  - Expresa el principio de conservación de la energía

> "La suma algebraica de las tensiones a lo largo de una trayectoria cerrada es cero"

- Matemáticamente:

$$\boxed{\sum_{m=1}^{M} v_m = 0}$$

(las subidas de tensión positivas y las caídas negativas, o viceversa)

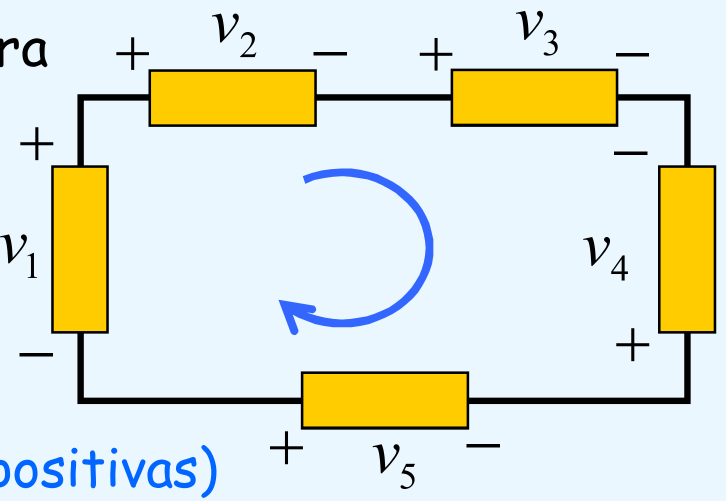
donde M es el número de tensiones a lo largo de la malla y v_m es la m-ésima tensión

- Nota: no es necesario que la trayectoria esté recorrida por un cable

1.8 Leyes de Kirchhoff

- Ley de Kirchhoff de las tensiones (KVL):

-Ej: Aplicar la KVL al circuito de la figura



Solución:

- Elegimos un sentido de giro y lo indicamos con una flecha

- Asignamos a cada tensión el signo del primer terminal que encontramos (es decir, subidas negativas y caídas positivas)

$$\sum_{m=1}^{5} v_m = 0 \longrightarrow -v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_5 = 0$$

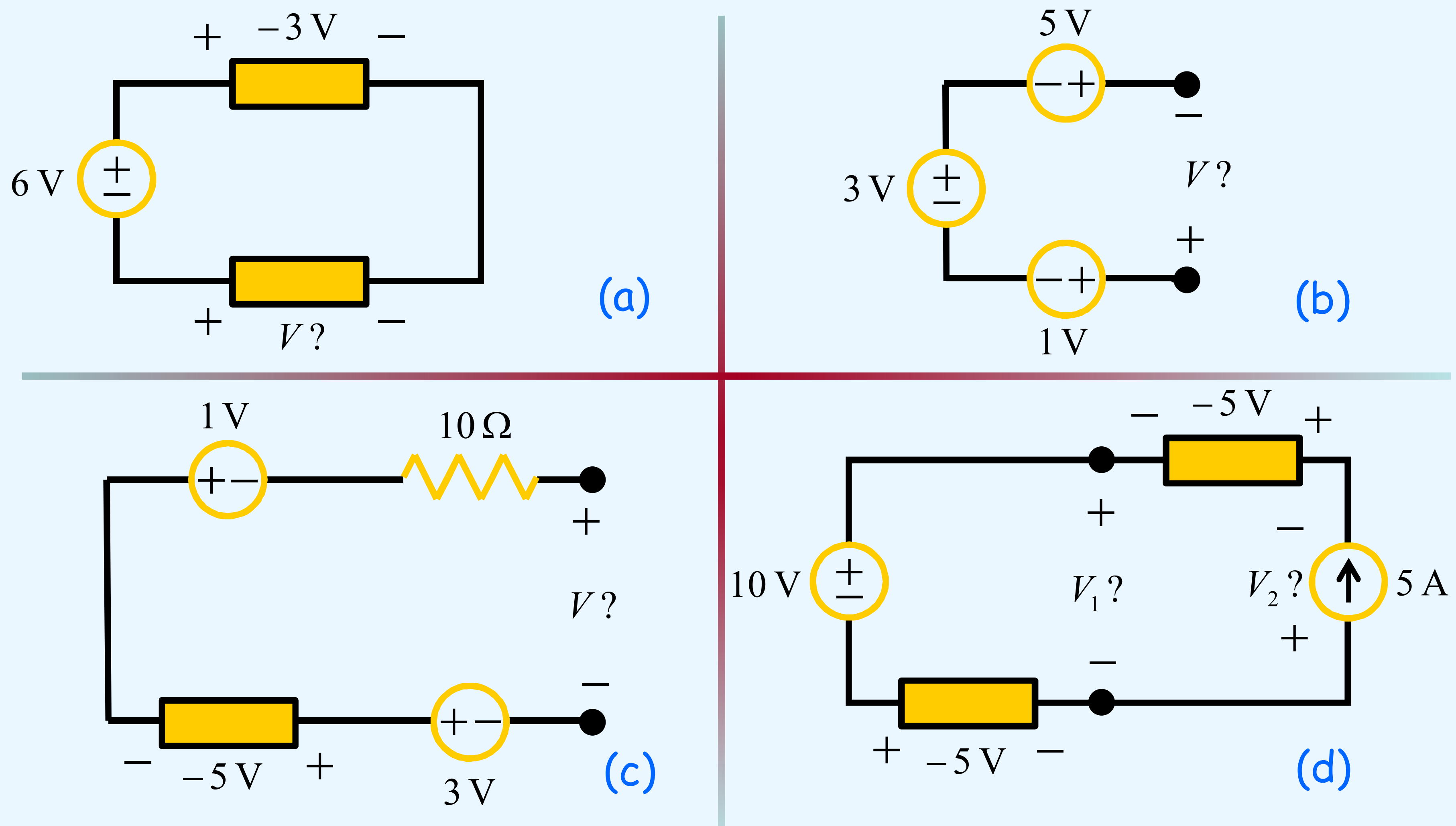
- También podemos escribir: $v_1 + v_4 + v_5 = v_2 + v_3$

- Enunciado alternativo de la KVL:

> "En un lazo (camino cerrado), la suma de subidas de tensión es igual a la suma de caídas"

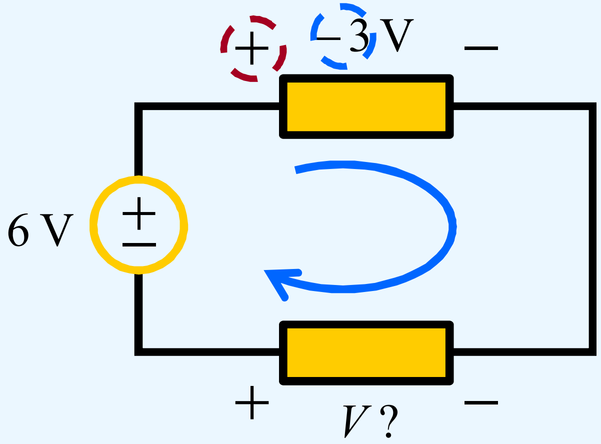
$$\sum v_{\text{subidas}} = \sum v_{\text{caídas}}$$ (todas positivas)

- Ejemplo 6: Calcular las tensiones indicadas en los circuitos de la figura aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones .



Solución: $\sum_{m=1}^{M} V_m = 0$

(a)



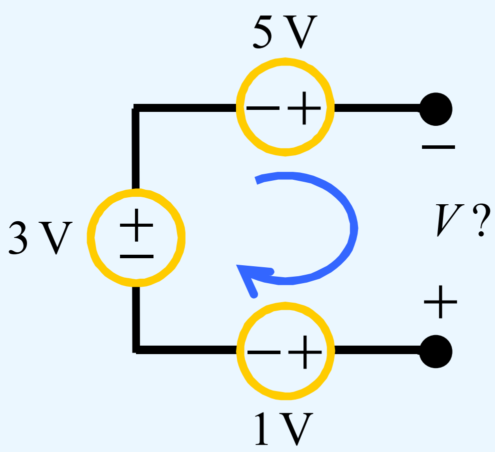
$$\sum_{m=1}^{3} V_m = 0 \qquad \text{(suma algebraica)}$$

$$+(-3) - V - 6 = 0 \;\Rightarrow\; V = -9\ \mathrm{V}$$

signo de la ley

signo de la variable

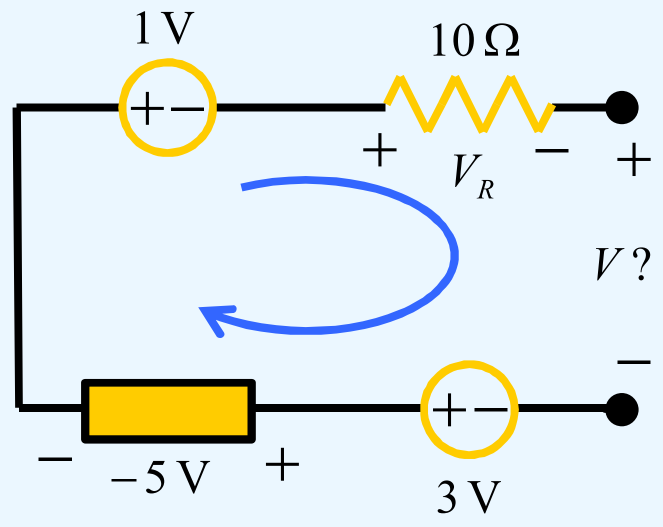
(b)



$$\sum_{m=1}^{4} V_m = 0$$

$$-V + 1 - 3 - 5 = 0 \;\Rightarrow\; V = -5\ \mathrm{V}$$

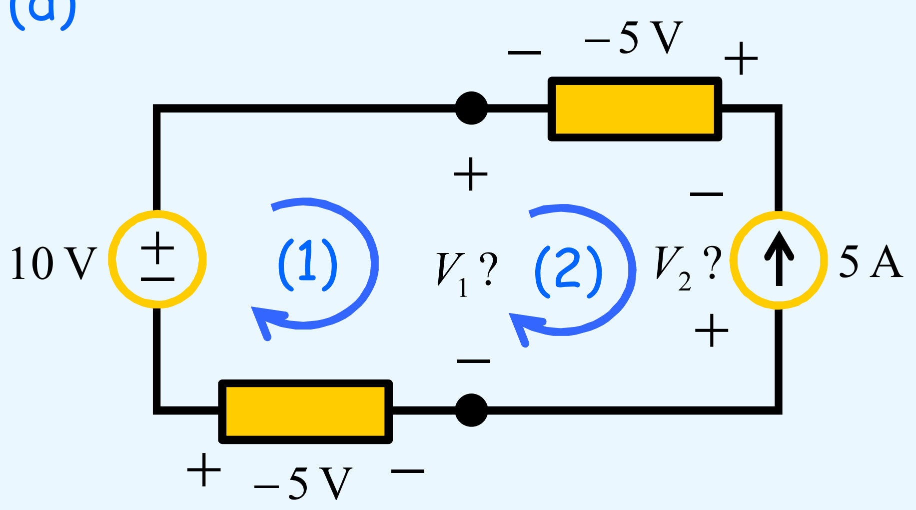
(c)



$$\sum_{m=1}^{5} V_m = 0$$

$$+V - 3 + (-5) + 1 + \underset{=0}{V_R} = 0 \Rightarrow V = 7\ \mathrm{V}$$

(d)



$$\sum_{m=1}^{3} V_m = 0 \quad \text{(lazo 1)}$$

$$+V_1 - (-5) - 10 = 0 \Rightarrow V_1 = 5\ \mathrm{V}$$

$$\sum_{m=1}^{3} V_m = 0 \quad \text{(lazo 2)}$$

$$-(-5) - V_2 - 5 = 0 \Rightarrow V_2 = 0\ \mathrm{V}$$

1.8 Leyes de Kirchhoff

- Análisis de circuitos:

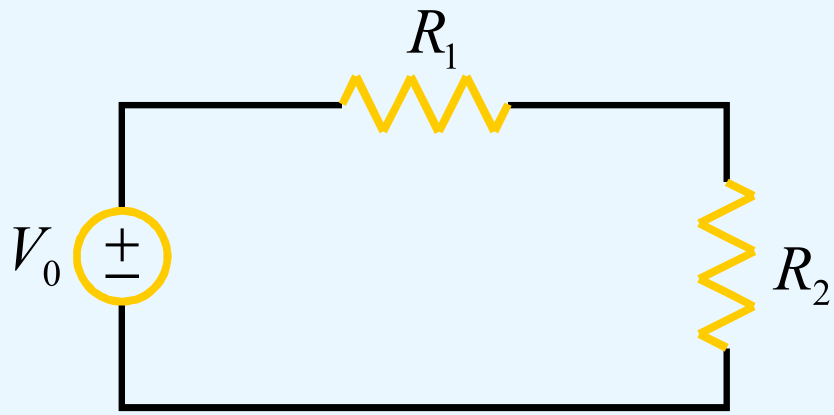
  - El objetivo general del análisis de circuitos es determinar las tensiones y corrientes asociadas a cada elemento de un circuito

  - Para ello es necesario resolver un conjunto de ecuaciones simultáneas que se obtienen aplicando de forma combinada las leyes de Kirchhoff y las relaciones i-v de los elementos del circuito

  - Las relaciones i-v gobiernan el comportamiento de cada elemento con independencia de en qué circuito esté conectado

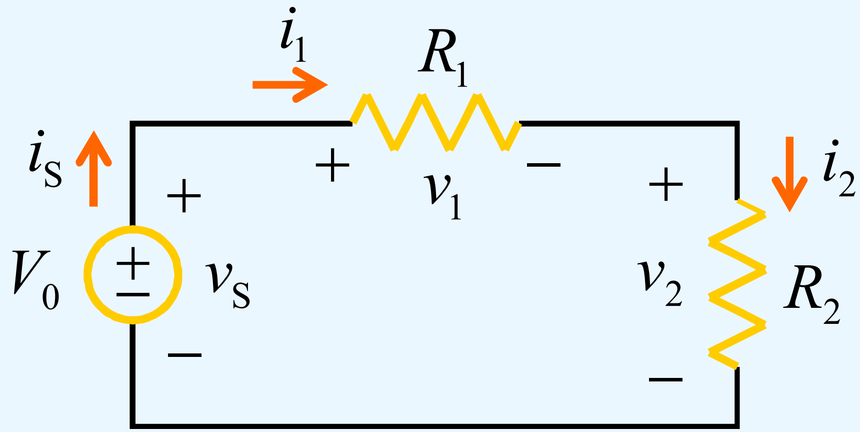
  - Las leyes de Kirchhoff son condiciones impuestas a las conexiones, independientes de los elementos concretos presentes en el circuito

- Ejemplo 7: Calcular las tensiones y las corrientes para cada elemento del circuito de la figura. V_0 =10 V, R_1 = 2000 Ohm y R_2 = 3000 Ohm.



Solución:

- Asignamos tensión y corriente a cada elemento:



3 elementos => 6 incógnitas

- Ecs. para los elementos (Relaciones i-v):

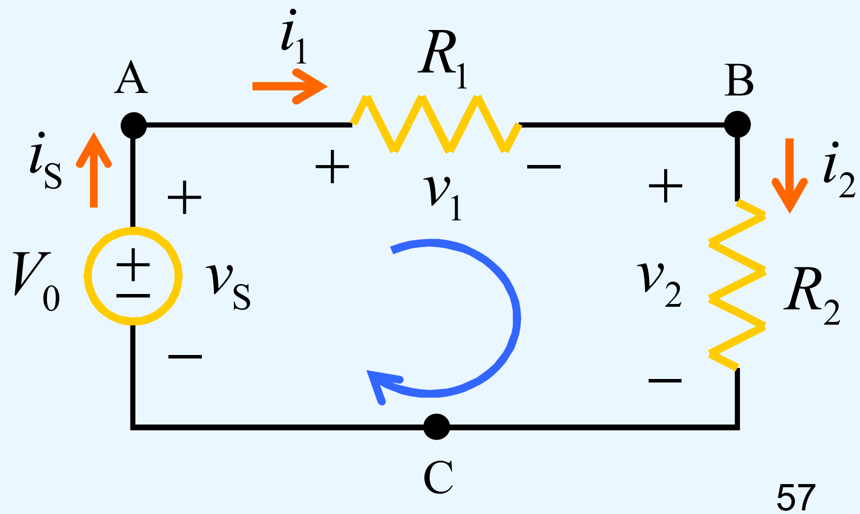
$$v_S = V_0 \qquad v_1 = R_1 i_1 \qquad v_2 = R_2 i_2$$

- Ecs. para las conexiones (Ecs. de Kirchhoff):

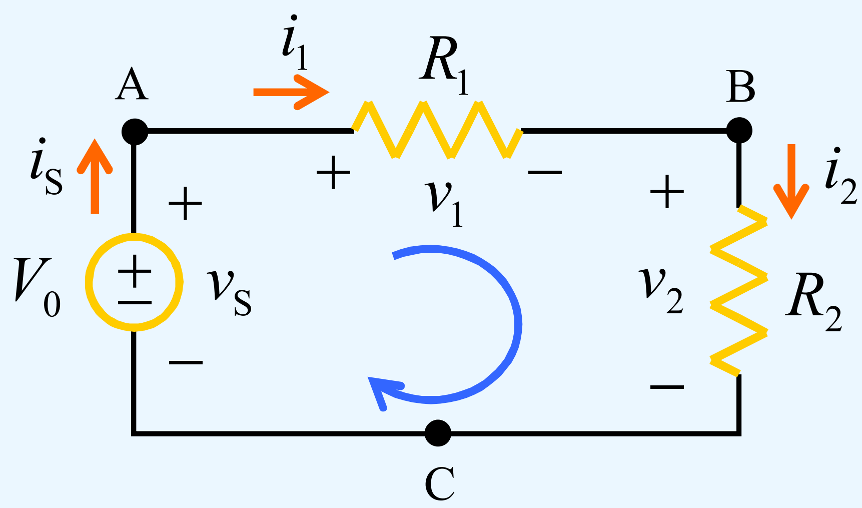
- Nudo A: $i_S = i_1$

- Nudo B: $i_1 = i_2$

- Malla: $-v_S + v_1 + v_2 = 0$



$$\left.\begin{aligned} v_S &= V_0 \\ v_1 &= R_1 i_1 \\ v_2 &= R_2 i_2 \\ i_S &= i_1 \\ i_1 &= i_2 \\ -v_S + v_1 + v_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$



- Sustituyendo en la última:

$$-V_0 + R_1 i_1 + R_2 i_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad i_1 = \frac{V_0}{R_1 + R_2} = \frac{10}{2000 + 3000} = 2\,\mathrm{mA}$$

- de donde

$$v_1 = R_1 i_1 = 2000 \times 2 \times 10^{-3} = 4\,\mathrm{V}$$

$$v_2 = R_2 i_2 = R_2 i_1 = 3000 \times 2 \times 10^{-3} = 6\,\mathrm{V}$$

- En el tema 2 veremos métodos más sencillos y sistemáticos de resolver circuitos !!

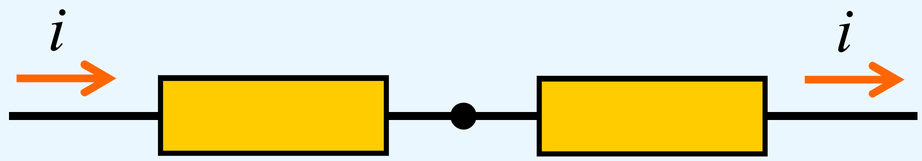
1.9 Divisores de tensión y de corriente

- Conexiones serie y paralelo:

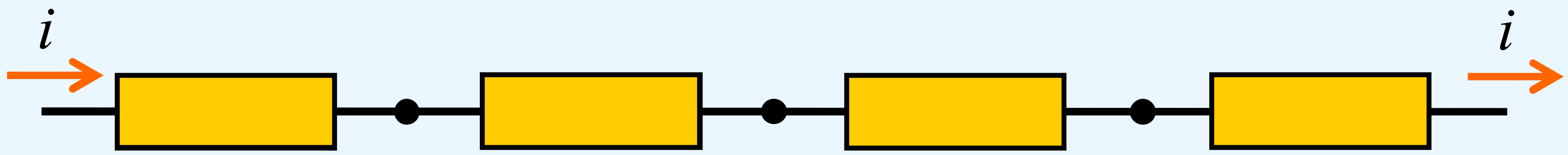
  - Conexión en serie:

> "Dos elementos están conectados en serie cuando comparten un nudo común al que no hay conectado ningún otro elemento. En consecuencia, por dos elementos conectados en serie pasa la misma corriente."

  - Gráficamente:



  - Esta idea se puede extender al caso de más de dos elementos:



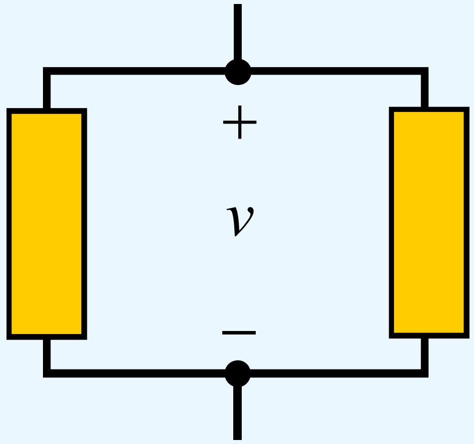
1.9 Divisores de tensión y de corriente

- Conexiones serie y paralelo:

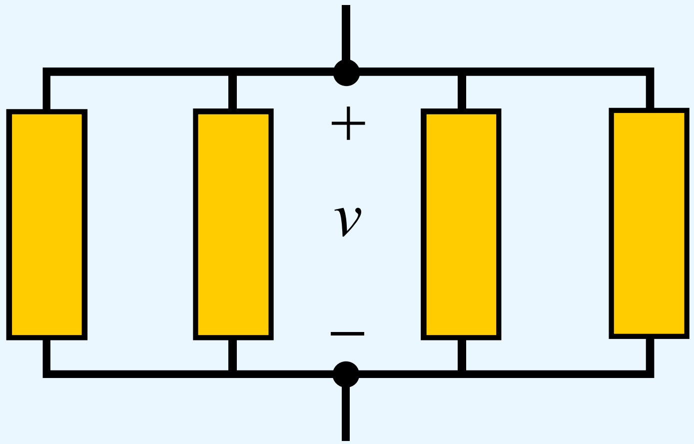
  - Conexión en paralelo:

> "Dos elementos están conectados en paralelo cuando están conectados entre el mismo par de nudos. En consecuencia, dos elementos conectados en paralelo tienen la misma tensión entre sus terminales"

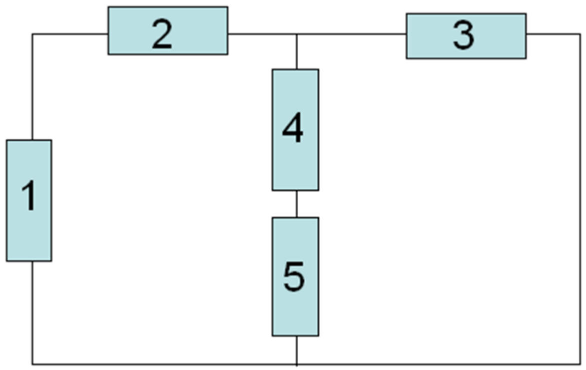
- Gráficamente:



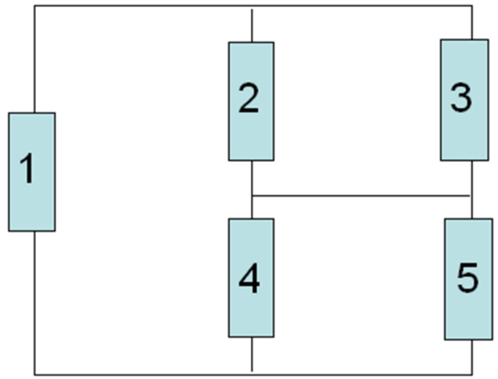
- Para más de dos elementos:



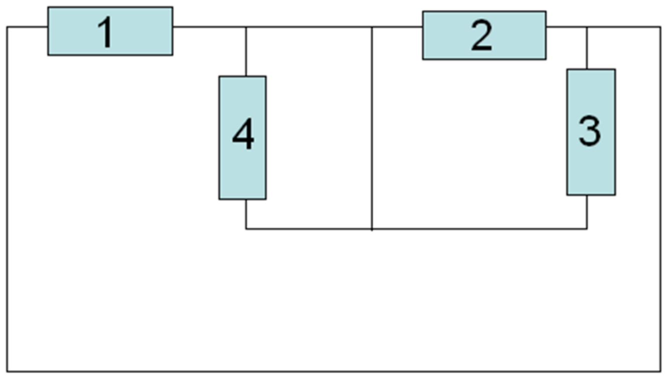
- Ejemplo 8: En los siguientes circuitos, identificar qué elementos están conectados en serie y cuales en paralelo



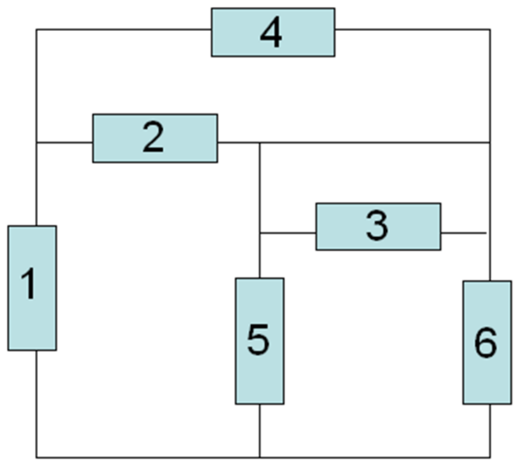
a)



b)



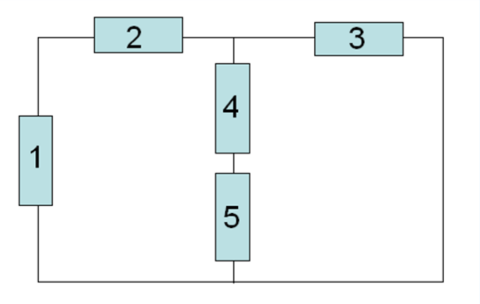
c)



d)

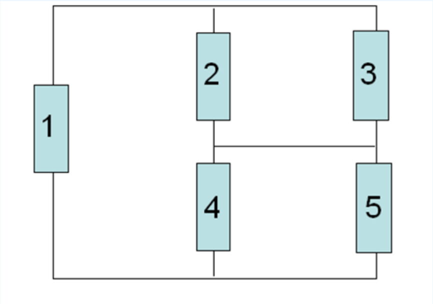
Solución:

- Circuito (a):
  - 1 y 2 están conectados en serie
  - 4 y 5 están conectados en serie



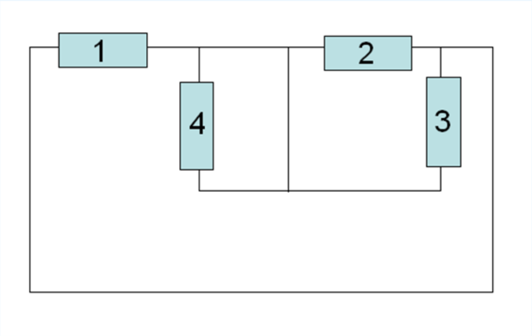
(a)

- Circuito (b):
  - 2 y 3 están conectados en paralelo
  - 4 y 5 están conectados en paralelo



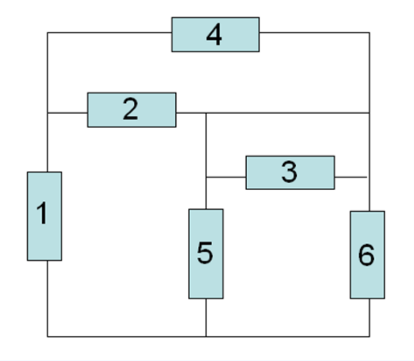
(b)

- Circuito (c):
  - 1, 2 y 3 están conectados en paralelo



(c)

- Circuito (d):
  - 2 y 4 están conectados en paralelo

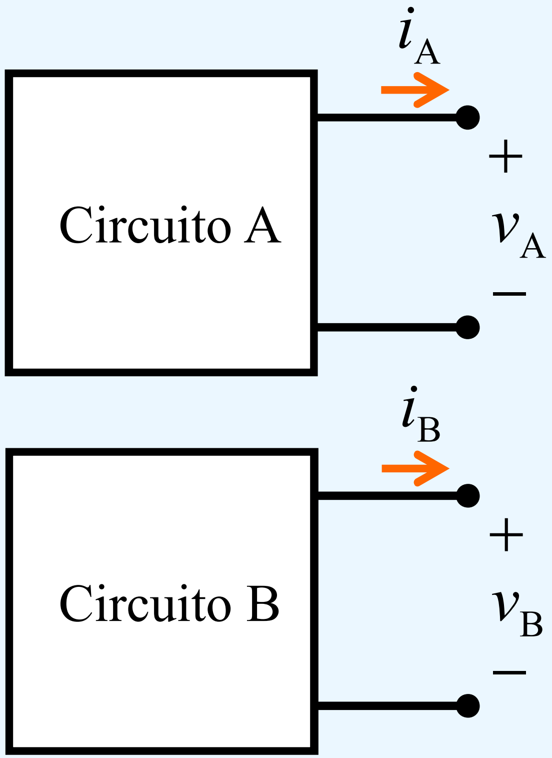


(d)

1.9 Divisores de tensión y de corriente

- Definición de circuitos equivalentes:

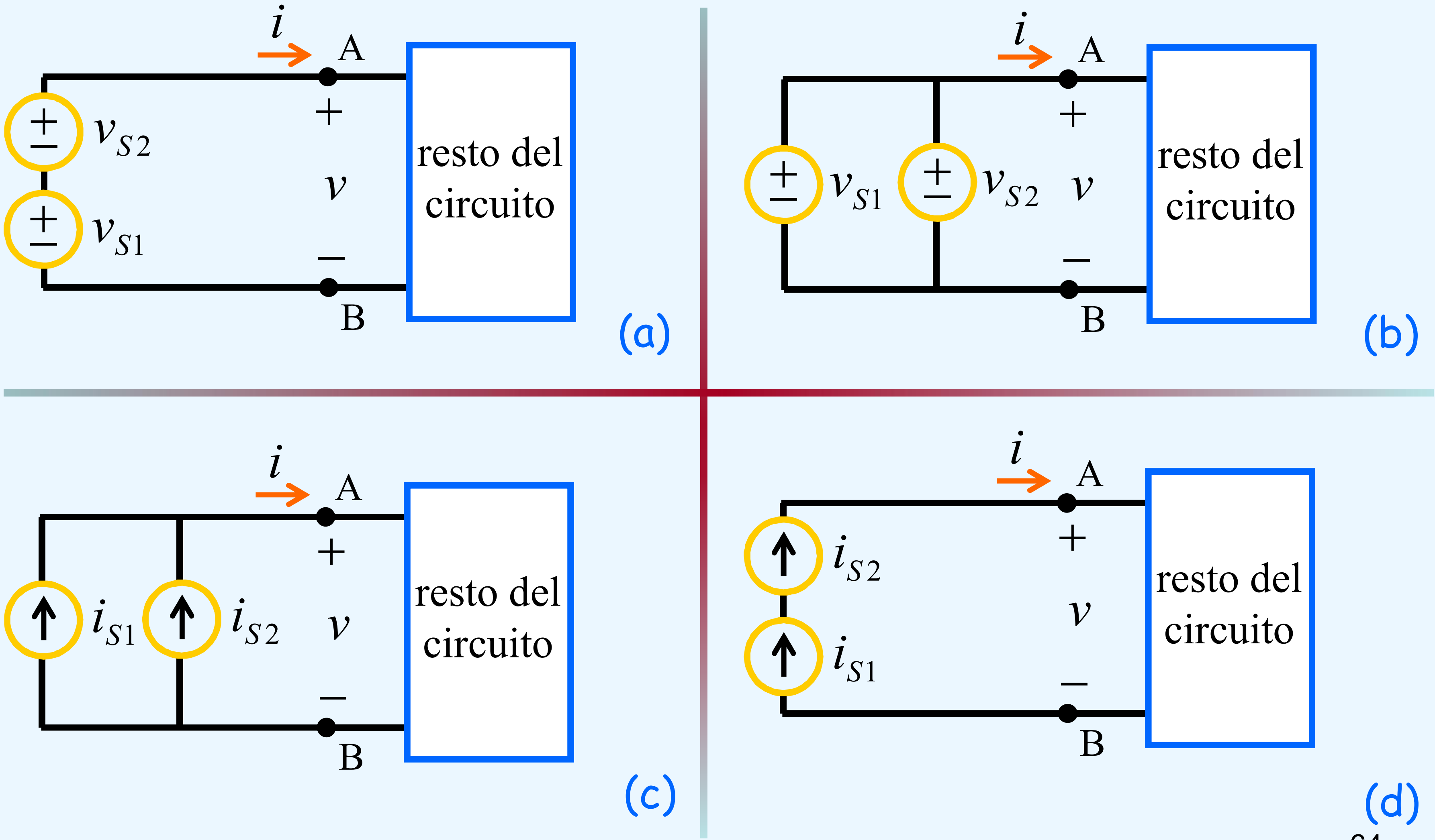
"Dos circuitos son equivalentes cuando tienen las mismas características i-v para un par de terminales determinado"



$$\frac{v_A}{i_A} = \frac{v_B}{i_B}$$

- En este tema aplicaremos esta definición para simplificar circuitos con múltiples resistencias en serie o en paralelo

- Ejemplo 9: Indicar si los circuitos de la figura son posibles y, en caso caso afirmativo, sustituir las fuentes por una única fuente equivalente

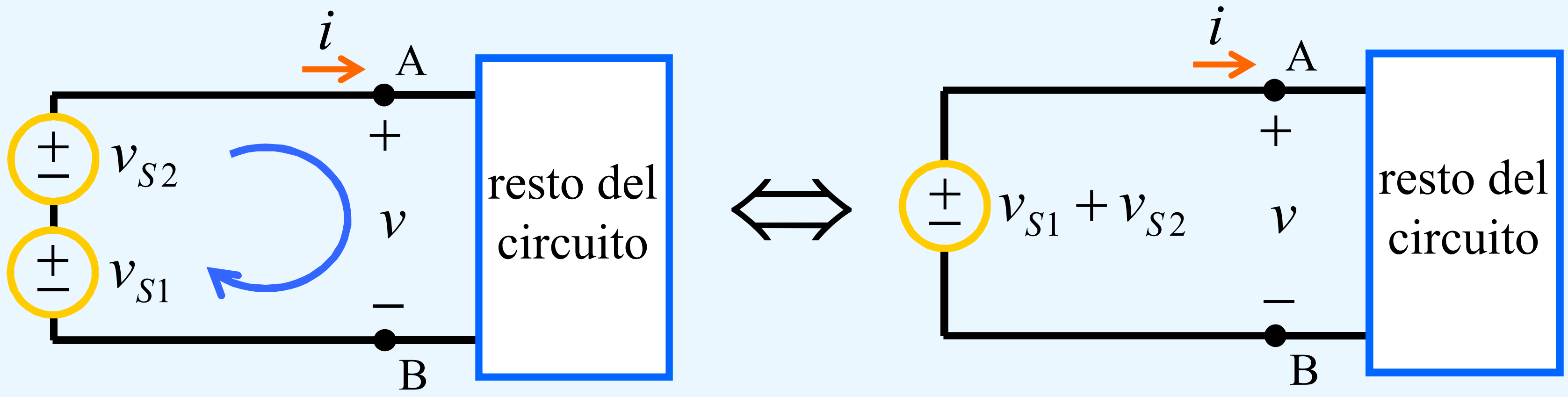


Solución:

- Aplicando la KVL:

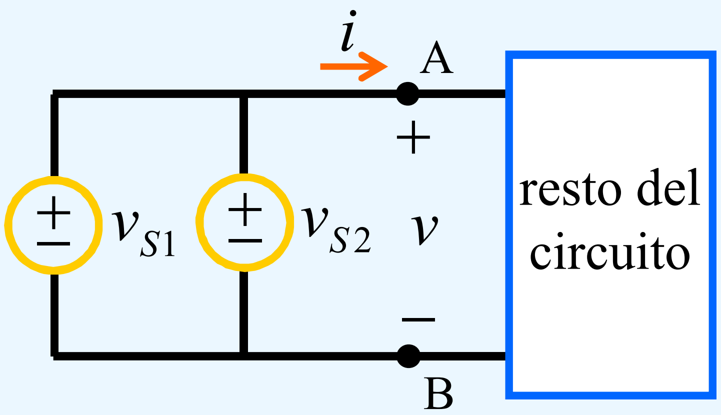
$$-v_{S1}-v_{S2}+v=0 \Rightarrow v=v_{S1}+v_{S2}$$

(a) Fuentes de tensión en serie



(b) Fuentes de tensión en paralelo

- En general no es posible ya que v no puede tener simultáneamente dos valores distintos

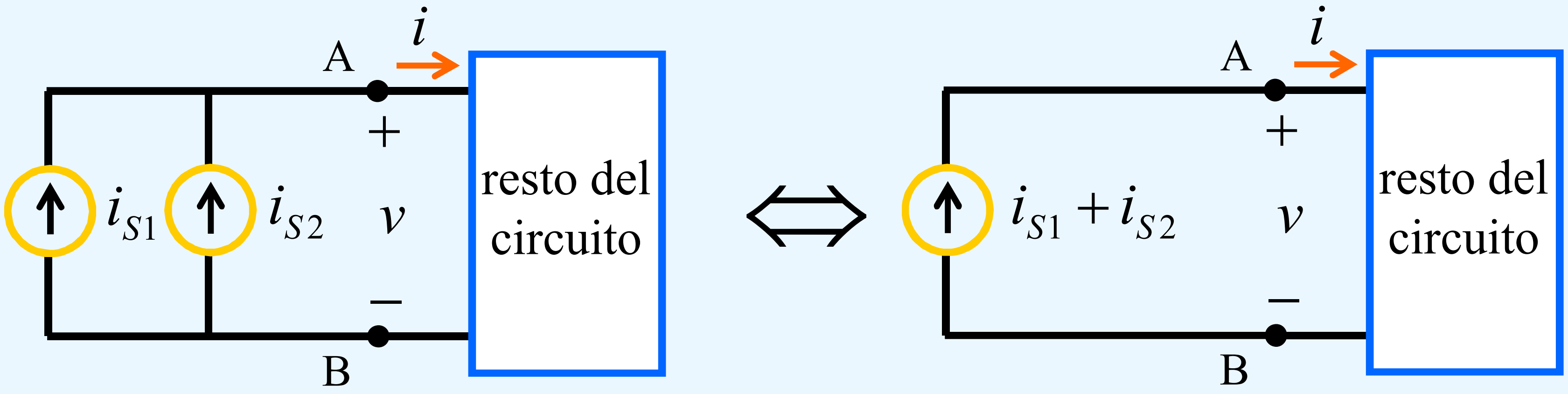


- Solo sería posible si $v_{S1}=v_{S2}$

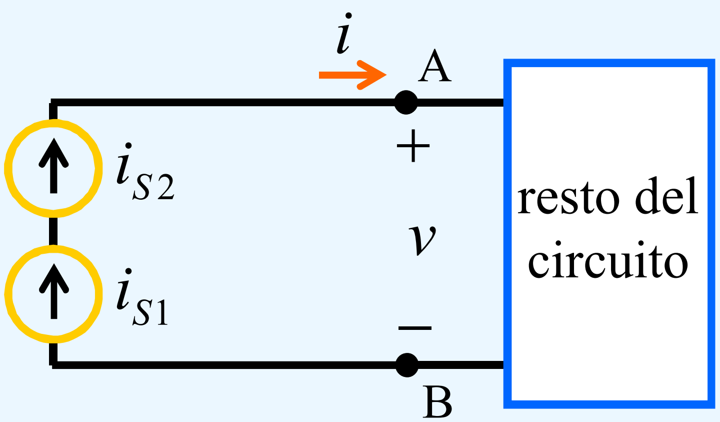
(c) Fuentes de corriente en paralelo

- Aplicando la KCL en el nudo A:

$$i_{S1} + i_{S2} = i$$



(b) Fuentes de corriente en serie

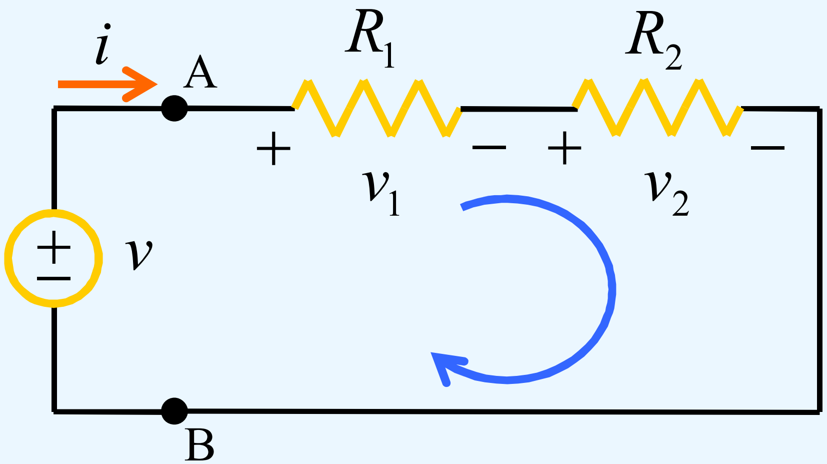


- En general no es posible ya que i no puede tener simultáneamente dos valores distintos

- Solo sería posible si $i_{S1} = i_{S2}$

1.9 Divisores de tensión y de corriente

- Asociación de resistencias en serie:

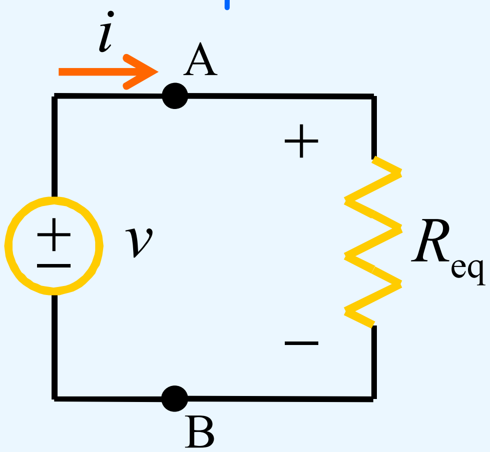


- KVL: $v = v_1 + v_2$
- Ley de Ohm: $v_1 = R_1 i \qquad v_2 = R_2 i$
- Sustituyendo en KVL:

$$v = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i$$

$$\frac{v}{i} = R_1 + R_2$$

- El circuito de partida es equivalente al circuito:

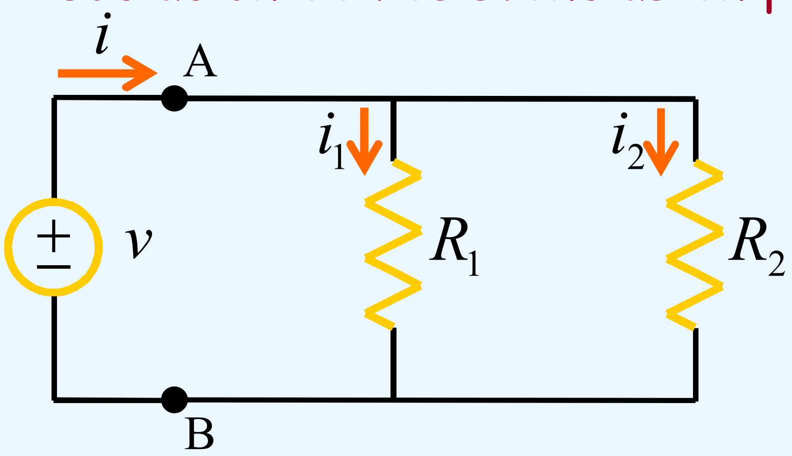


- con: $\boxed{R_{\text{eq}} = R_1 + R_2}$
- ya que: $\dfrac{v}{i} = R_{\text{eq}}$

- Para N resistencias en serie: $\boxed{R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N = \sum_{n=1}^{N} R_n}$

1.9 Divisores de tensión y de corriente

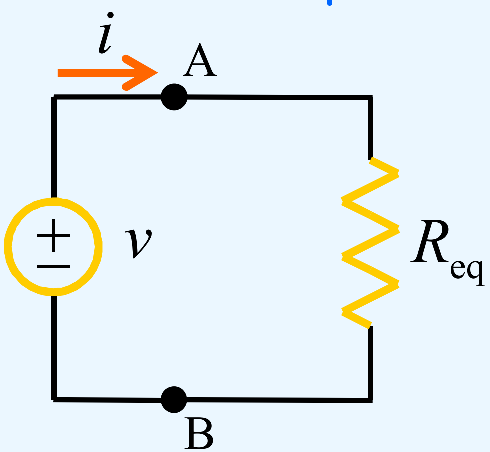
- Asociación de resistencias en paralelo:



- KCL: $i = i_1 + i_2$
- Ley de Ohm: $v = R_1 i_1 \qquad v = R_2 i_2$
- Sustituyendo en KCL:

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v$$

- El circuito de partida es equivalente al circuito:

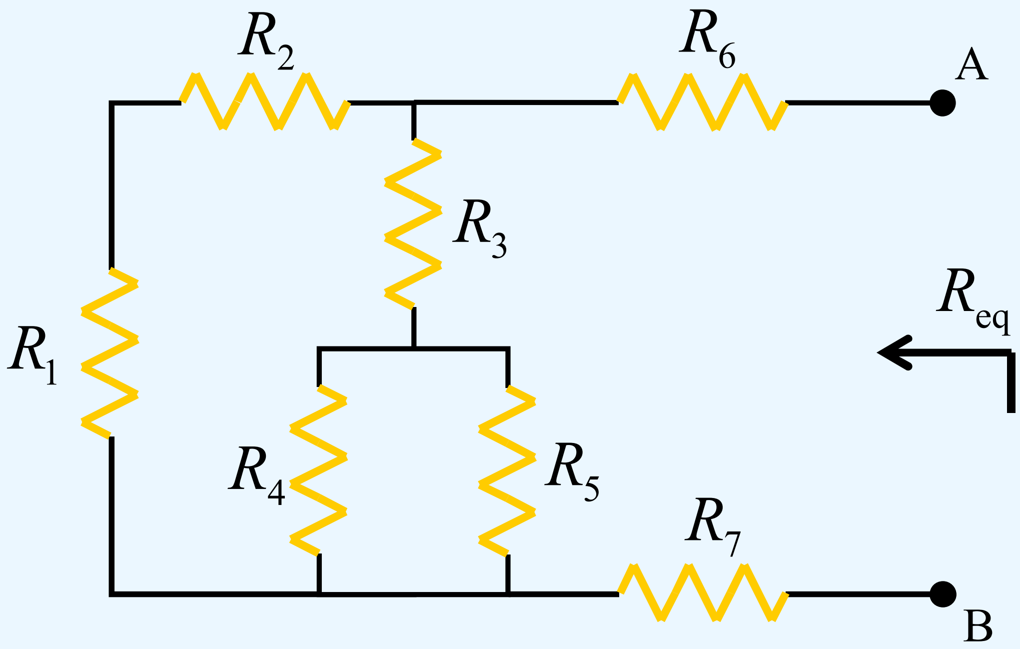


- con: $\dfrac{1}{R_{\text{eq}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \Longrightarrow \boxed{R_{\text{eq}} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$

- ya que: $i = \dfrac{1}{R_{\text{eq}}} v$

- Para N resistencias en paralelo: $\boxed{\dfrac{1}{R_{\text{eq}}} = \dfrac{1}{R_1} + \cdots + \dfrac{1}{R_N} = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{R_n}}$

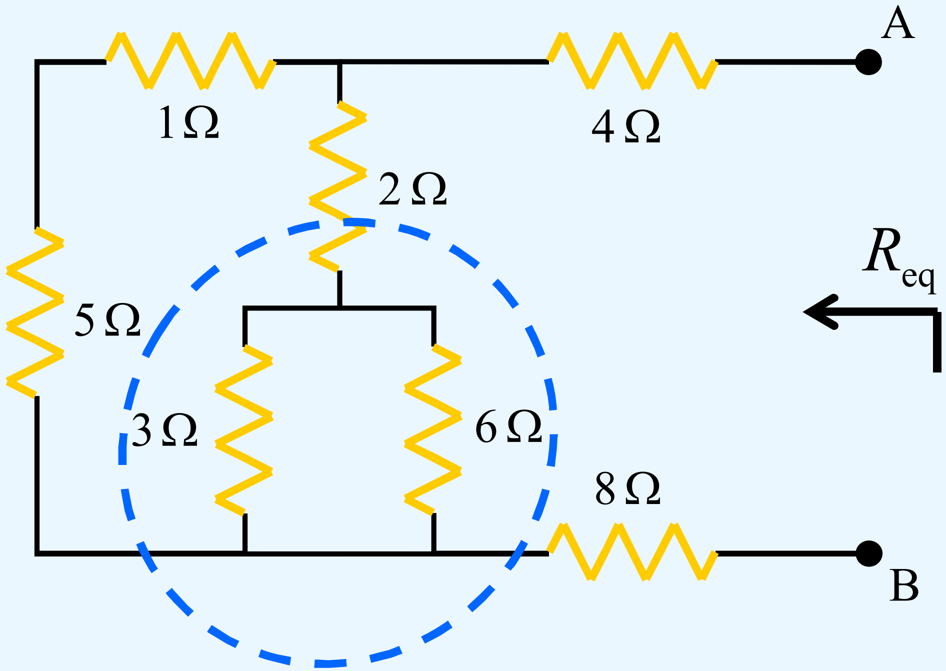
- Ejemplo 10: Calcular la resistencia equivalente del circuito de la figura. $R_1 = 5$, $R_2 = 1$, $R_3 = 2$, $R_4 = 3$, $R_5 = 6$, $R_6 = 4$ y $R_7 = 8$ (todas en ohmios)



Solución:

- Asociamos 3 Ohm y 6 Ohm:

$$3\,\Omega \parallel 6\,\Omega = \frac{3\times 6}{3+6} = 2\,\Omega$$

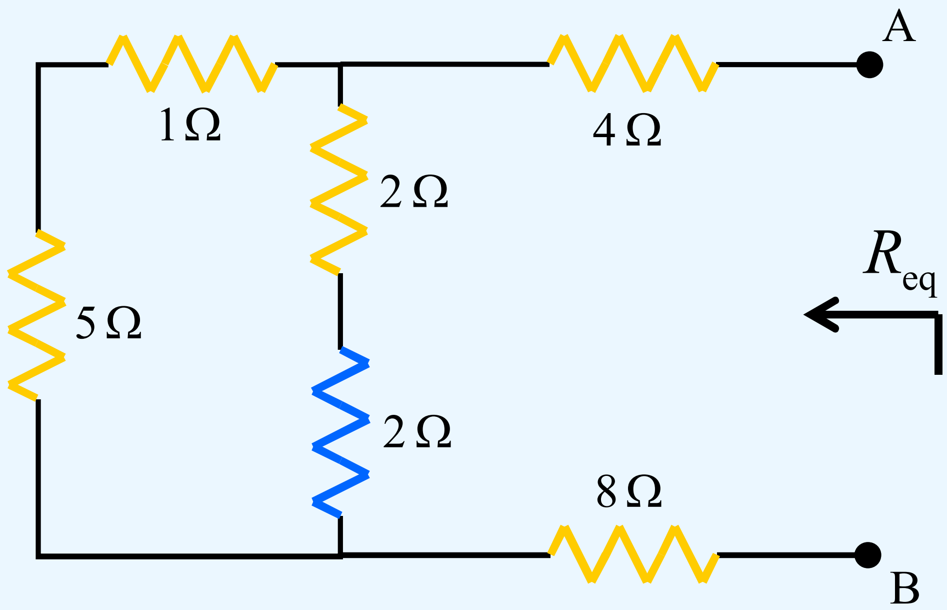


- Asociamos 1 Ohm y 5 Ohm:

$$1\,\Omega + 5\,\Omega = 6\,\Omega$$

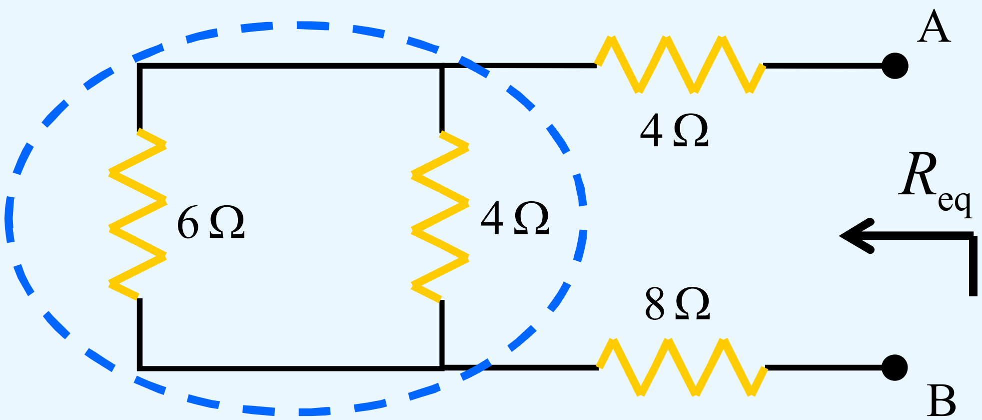
- Asociamos 2 Ohm y 2 Ohm:

$$2\,\Omega + 2\,\Omega = 4\,\Omega$$



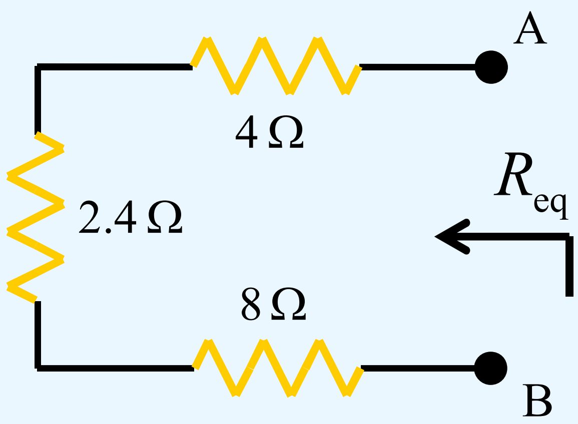
- Asociamos 6 Ohm y 4 Ohm:

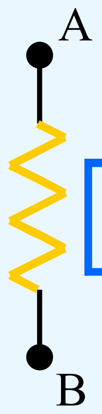
$$6\,\Omega \,\|\, 4\,\Omega = \frac{6\times 4}{6+4} = 2.4\,\Omega$$



- Finalmente:

$$R_{eq} = 4\,\Omega + 2.4\,\Omega + 8\,\Omega = 14.4\,\Omega$$





$$\boxed{R_{eq} = 14.4\,\Omega}$$

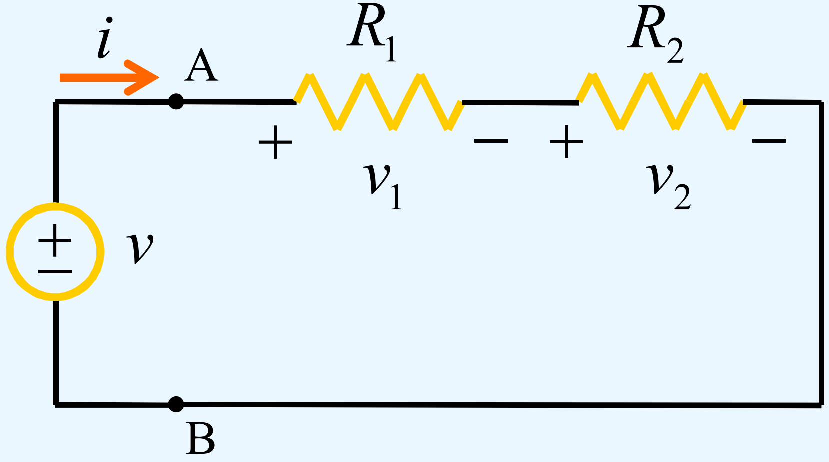
1.9 Divisores de tensión y de corriente

- Divisor de tensión:

  - La caída de tensión en cada resistencia vale:

$$v_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_{\text{eq}}} v$$

$$v_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_{\text{eq}}} v$$



$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$$

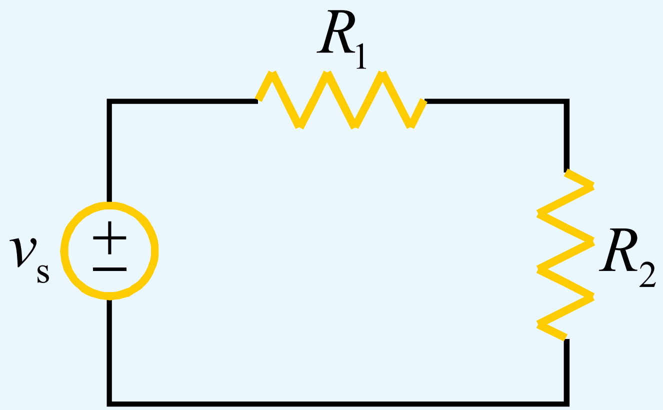
"En un divisor de tensión la tensión de la fuente se divide entre sus resistencias de forma proporcional a la resistencia de cada una"

- Matemáticamente:

$$\boxed{v_n = \frac{R_n}{R_{\text{eq}}} v}$$

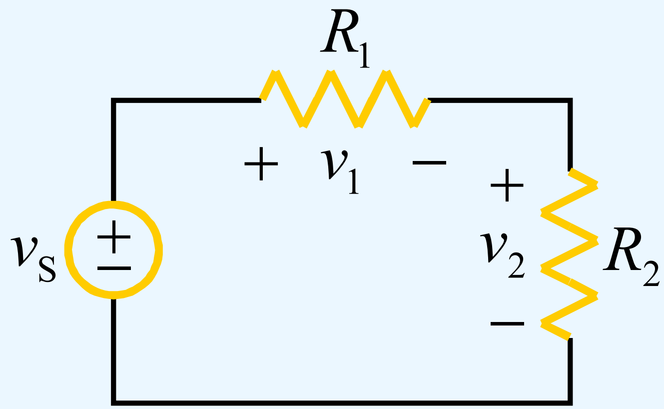
- Ejemplo 11: Determinar el valor de la resistencia R_2 en el circuito de la figura para que la caída de tensión en dicha resistencia sea $\frac{1}{4}$ de la tensión v_S suministrada por la fuente cuando R_1 = 9 Ohm. Calcular la corriente cuando v_S = 12 V.

D&S-7ª Ex. 3.3-1



Solución:

$$v_2 = \tfrac{1}{4} v_S \qquad R_1 = 9\,\Omega \qquad ¿R_2?$$



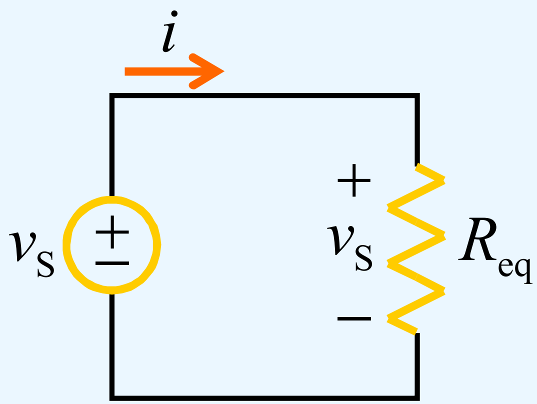
- Según la fórmula del divisor de tensión:

$$v_2 = \tfrac{1}{4} v_S = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_S$$

de donde

$$R_2 = \frac{R_1}{3} \Rightarrow R_2 = \frac{9}{3} = 3\,\Omega$$

- Cálculo de la corriente:



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

- Según la ley de Ohm:

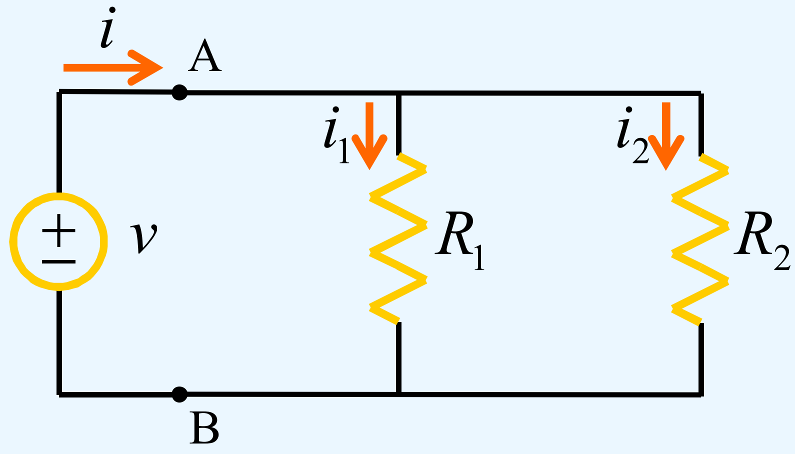
$$i = \frac{v_S}{R_{eq}} = \frac{12}{12} = 1\,\text{A}$$

1.9 Divisores de tensión y de corriente

- Divisor de corriente:
  - La corriente en cada resistencia vale:

$$i_1 = \frac{1}{R_1} v = \frac{R_{eq}}{R_1} i = \boxed{\frac{R_2}{R_1 + R_2} i}$$

$$i_2 = \frac{1}{R_2} v = \frac{R_{eq}}{R_2} i = \boxed{\frac{R_1}{R_1 + R_2} i}$$



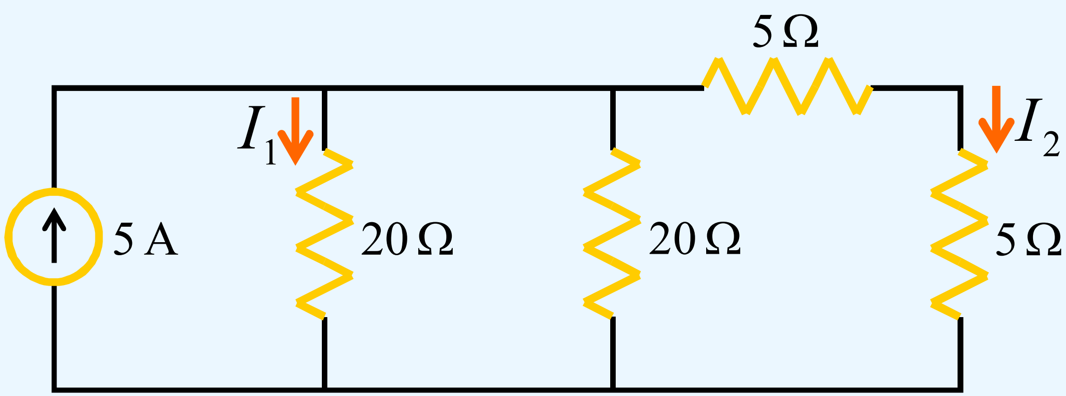
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

"En un divisor de corriente la corriente total se divide entre sus resistencias de forma inversamente proporcional a la resistencia de cada una"

- Matemáticamente:

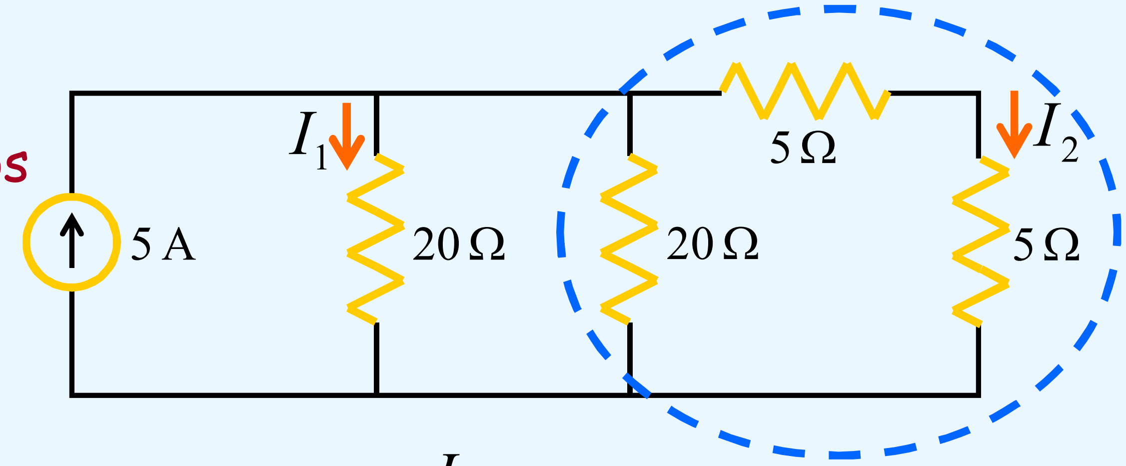
$$\boxed{i_n = \frac{R_{eq}}{R_n} i}$$

- Ejemplo 12: Hallar las corrientes I_1 e I_2 que se indican en el circuito de la figura.

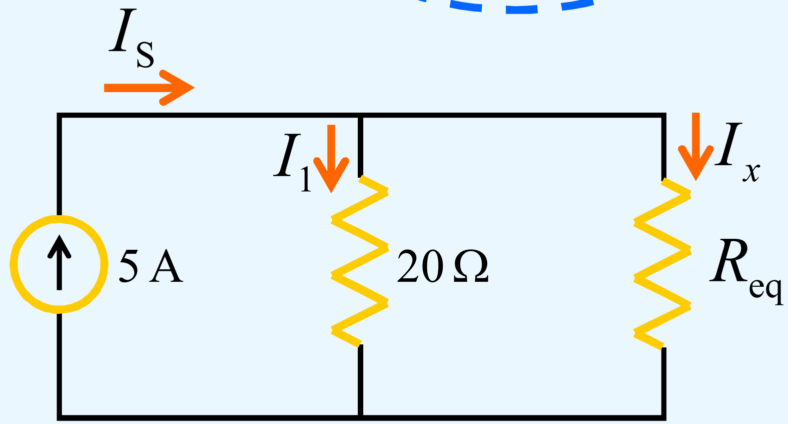


Solución:

- Para calcular I_1 reducimos el circuito a dos resistencias paralelo:



$$R_{eq} = 20\,\Omega \,\|\, 10\,\Omega = \frac{20 \times 10}{20 + 10} = \frac{20}{3}\,\Omega$$

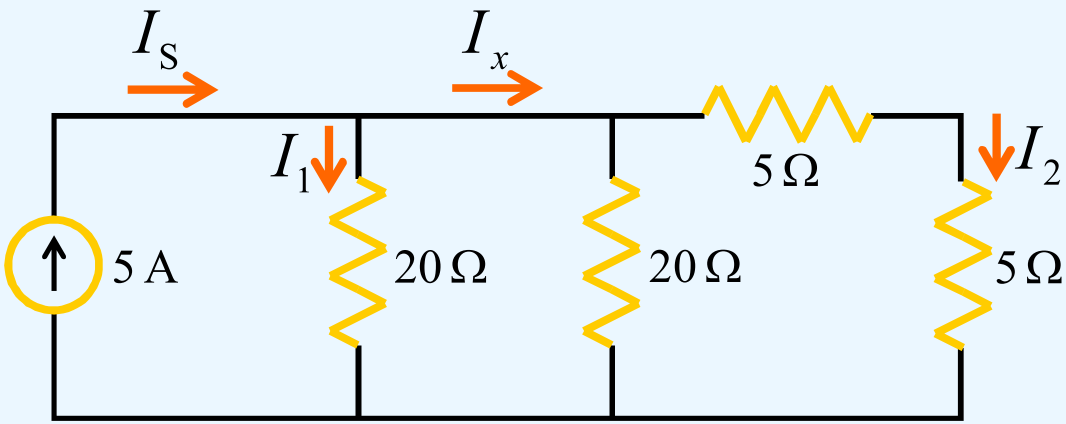


- Aplicando las fórmulas del divisor de corriente:

$$\boxed{I_1 = \frac{R_{eq}}{20 + R_{eq}} I_S = \frac{\frac{20}{3}\,5}{20 + \frac{20}{3}} = \frac{100}{80} = 1.25\ \text{A}}$$

$$I_x = I_S - I_1 = 5 - 1.25 = 3.75\ \text{A}$$

- Para calcular I_2 volvemos al circuito sin reducir



- Aplicamos, nuevamente, las fórmulas del divisor de corriente:

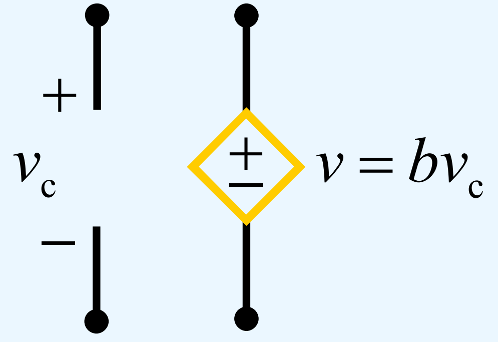
$$I_2 = \frac{20}{20+(5+5)} I_x = \frac{20}{30} \times 3.75 = 2.5 \text{ A}$$

1.10 Fuentes dependientes

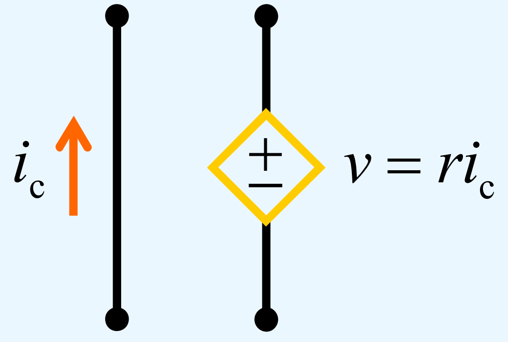
"Una fuente dependiente (o controlada) ideal es una fuente cuyo valor es proporcional a la tensión o corriente existentes en otra parte del circuito"

- Hay 4 tipos de fuentes dependientes:

  - Fuente de tensión controlada por tensión

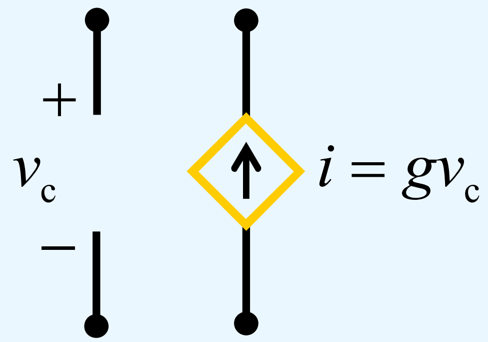


  - Fuente de tensión controlada por corriente

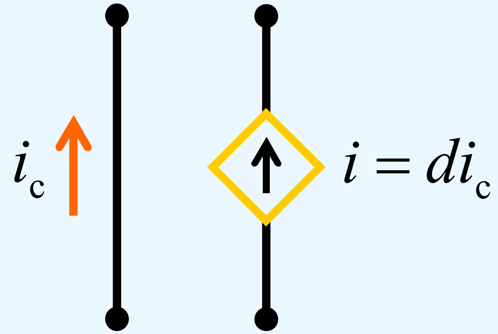


1.10 Fuentes dependientes

- Fuente de corriente controlada por tensión

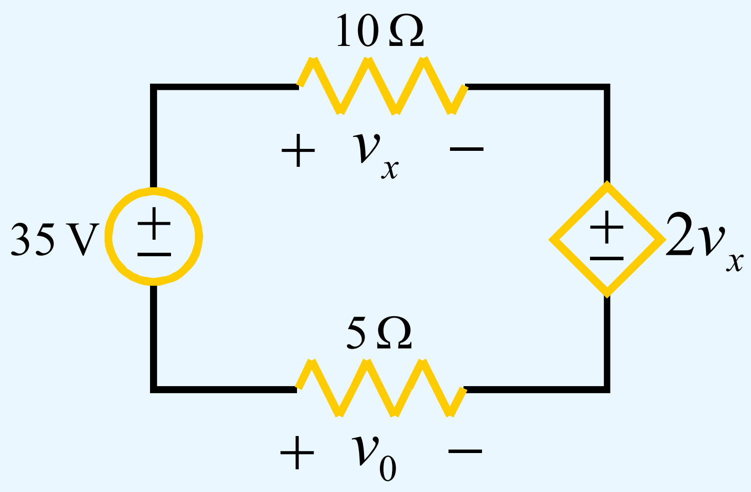


- Fuente de corriente controlada por corriente



- Ejemplo 13: Calcular las tensiones v_x y v_0 que se indican en el circuito de la figura.

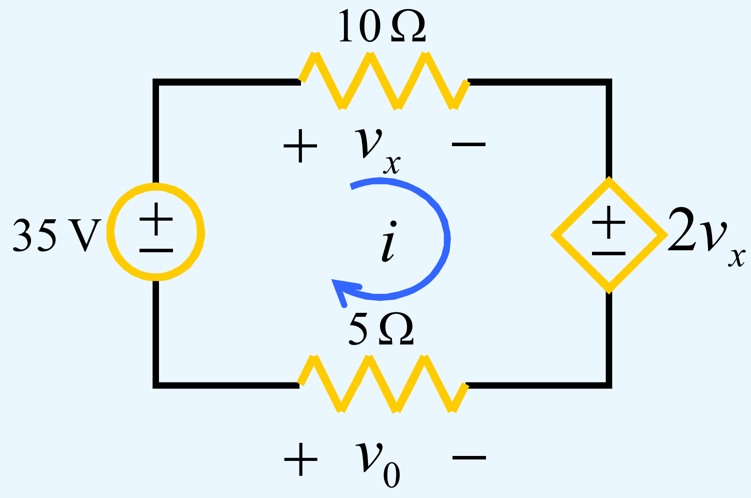
A&S-3ª P 2.6



Respuesta: 10 V, -5 V

Solución:

- Supondremos que la malla esta recorrida por una corriente *i*:



$¿v_x, \ v_0?$

- Aplicamos la KVL: $-35+v_x+2v_x-v_0=0$ (KVL)

- Aplicamos la ley de Ohm: $v_x=10i; \ v_0=-5i$ (ley de Ohm)

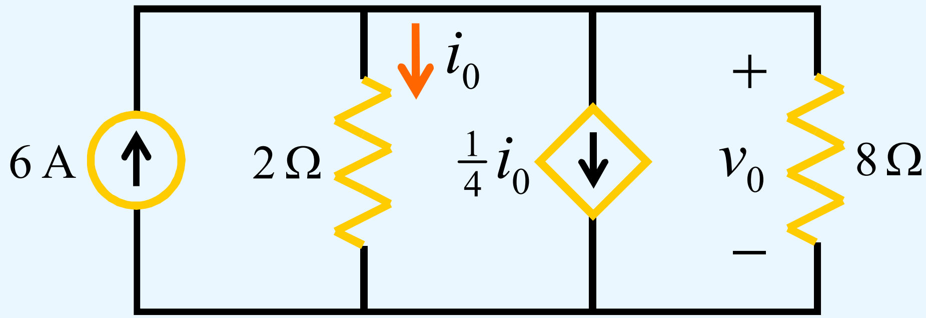
- Sustituimos la ley de Ohm en la KVL: $-35+3\times 10i+5i=0 \Rightarrow i=1\text{ A}$

- Finalmente, sustituimos la corriente en la ley de Ohm:

$$\boxed{v_x=10i=10\ \text{V}; \quad v_0=-5i=-5\ \text{V}}$$

- Ejemplo 14: Calcular v_0 e i_0 en el circuito de la figura.

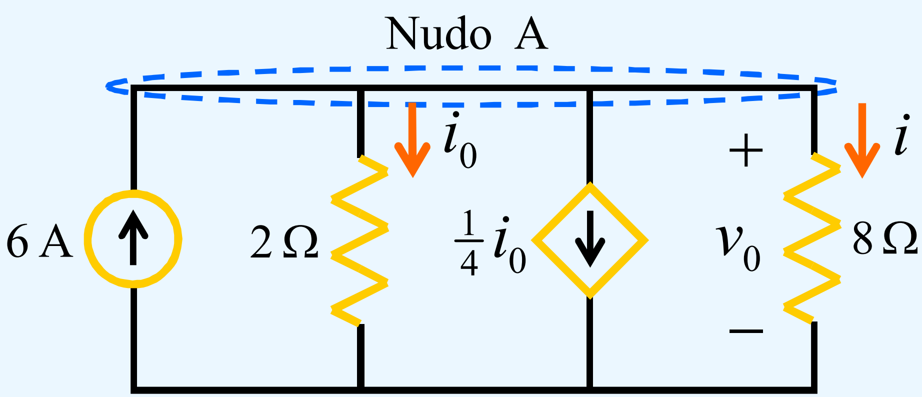
A&S-3ª PdeP 2.7



Respuesta: 8 V, 4 A

Solución:

- Supondremos que por la resistencia de 8 ohm circula una corriente *i* :



¿v_0, i_0?

- Aplicamos la KCL al nudo A: $6 = i_0 + \dfrac{1}{4} i_0 + i$ (KCL)

- Aplicamos la ley de Ohm: $i_0 = \dfrac{v_0}{2}; \; i = \dfrac{v_0}{8}$ (ley de Ohm)

- Sustituimos la ley de Ohm en la KCL: $6 = \dfrac{v_0}{2} + \dfrac{v_0}{8} + \dfrac{v_0}{8} \Rightarrow \boxed{v_0 = 8 \text{ V}}$

- Finalmente, sustituimos v_0 en la ley de Ohm: $\boxed{i_0 = \dfrac{v_0}{2} = 4 \text{ A}}$