Finanzas Aplicadas y Fintech

Clase 5: Riesgo y aleatoriedad

Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad de Chile
Semestre otoño 2019
Profesor: Omar Larré
Código IN5333

Conceptos básicos

Cartera de inversiones o portafolio: una selección de instrumentos financieros que forman parte de la propiedad de un individuo, un colectivo o una institución.

Riesgo: en el contexto de inversiones, es la medida del nivel de incerteza y pérdidas potenciales del retorno de un instrumento o cartera de instrumentos financieros.

Existen varios **tipos** o formas de clasificar los riesgos financieros. Veamos qué tipos de riesgos puede enfrentar una cartera de inversiones o portafolio.

Conceptos básicos

Riesgo de Mercado: asociado a las variaciones de precio de los distintos activos que componen un portafolio.

Dentro de riesgo de mercado, se distinguen casos particulares:

- **Riesgo de Moneda (tipo de cambio)**
- **Riesgo de Tasas de Interés**

Conceptos básicos

Riesgo de Mercado: asociado a las variaciones de precio de los distintos activos que componen un portafolio.

El sistema de AFP diferencia 5 tipos de multifondos según riesgos de mercado

Dentro de riesgo de mercado, se distinguen casos particulares:

- **Riesgo de Moneda (tipo de cambio)**
- **Riesgo de Tasas de Interés**

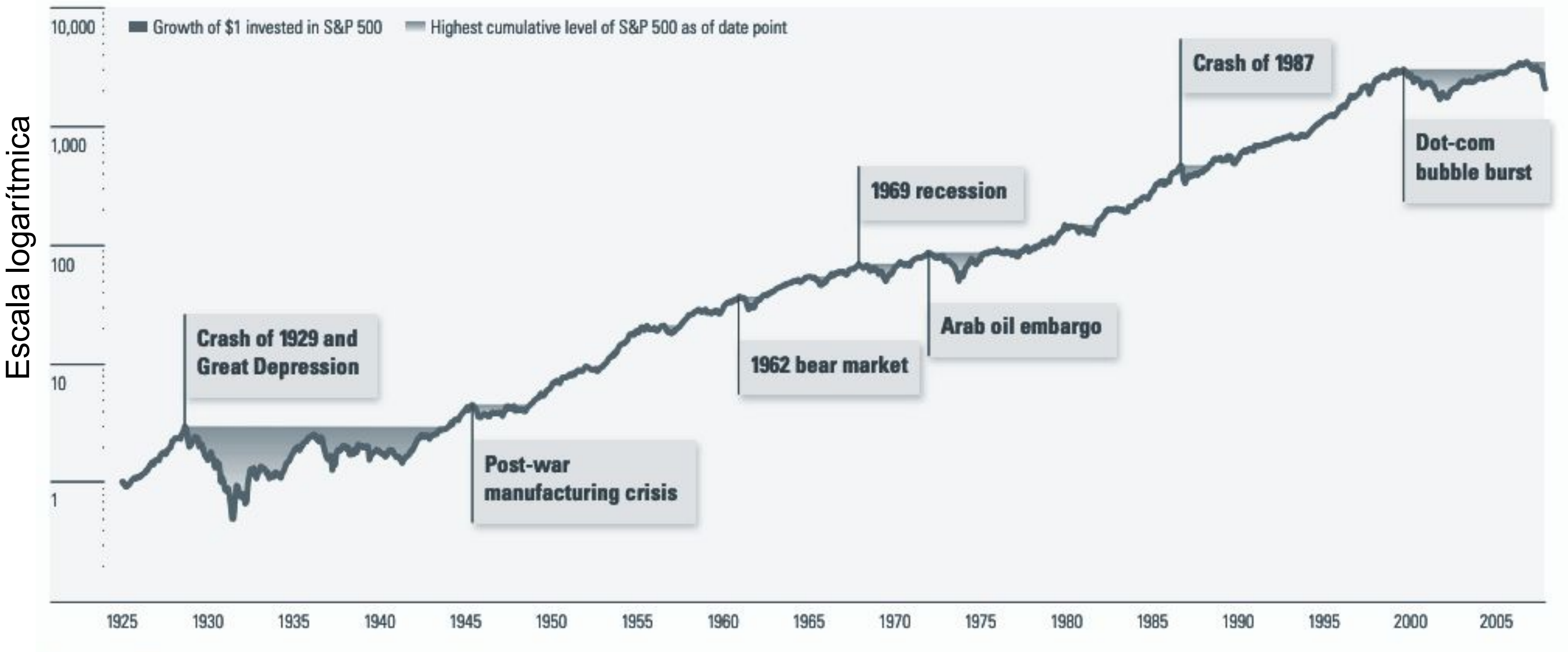
Conceptos básicos

Riesgo de Liquidez: asociado a la posibilidad de que el portafolio no sea capaz de generar suficientes recursos de efectivo para pagar sus obligaciones en el momento que se necesita.

Riesgo de Crédito: se refiere al riesgo de pérdida que sufriría el portafolio en el caso de que alguna contraparte incumpliese sus obligaciones contractuales de pago con la misma, resultando una pérdida financiera para éste. El ejemplo clásico de este riesgo es el riesgo de que un emisor de deuda sea incapaz de pagar.

Serie de precios y distribución de retornos

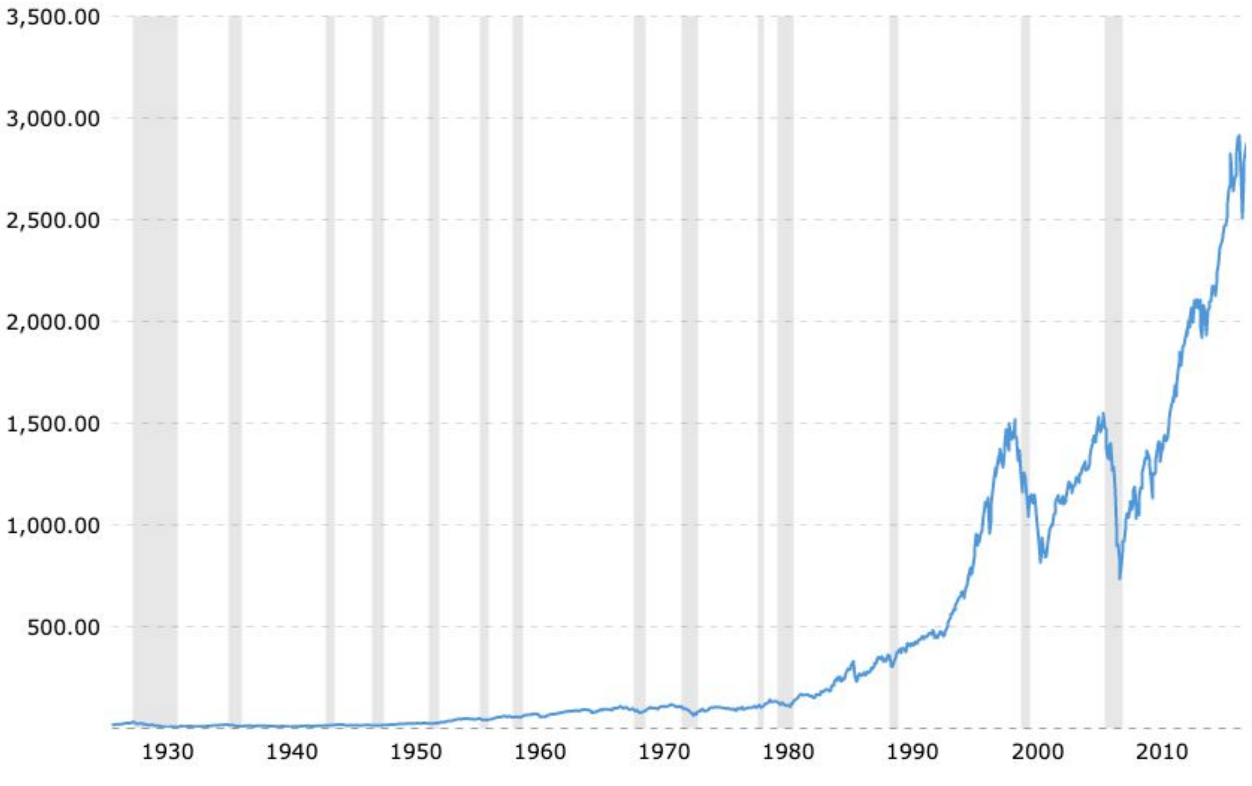
Cómo habría sido invertir US$1 en S&P500...



Growth of $1 includes reinvested dividends. Monthly data used to calculate returns.

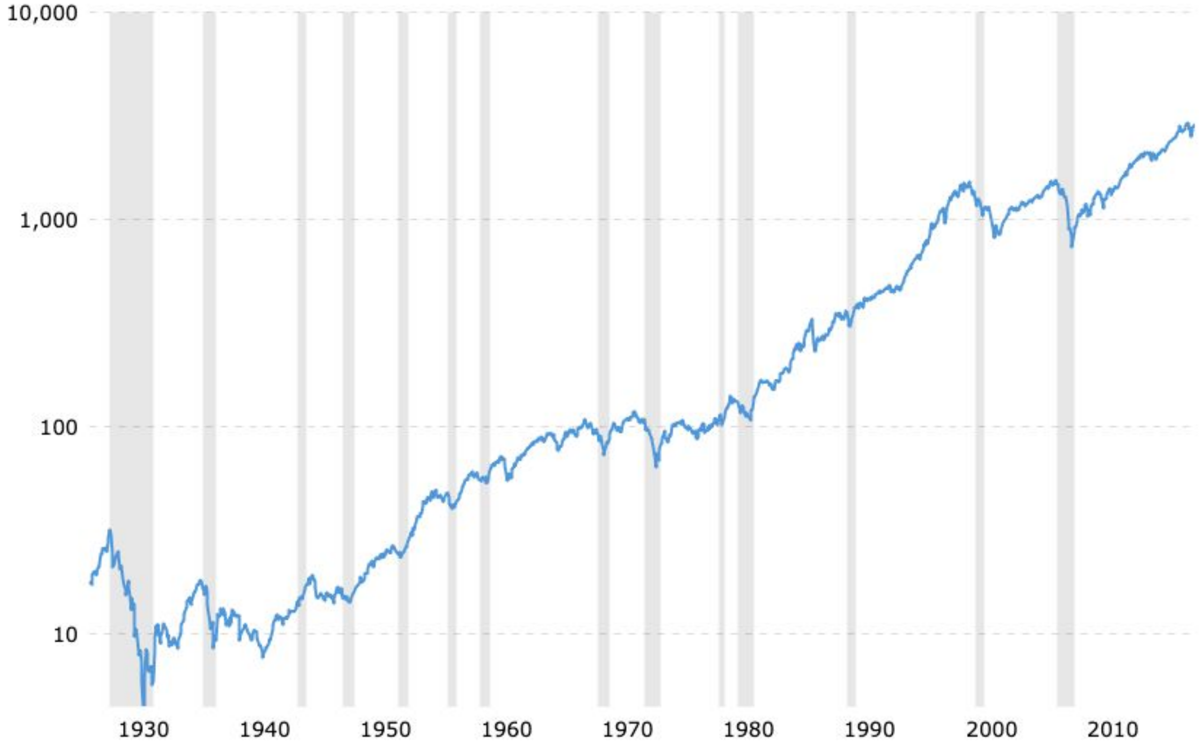
Fuente: Crashes, Fat Tails, and Efficient Frontiers, 2nd Edition, P. Kaplan.

Serie completa S&P500



Fuente: www.macrotrends.net

Serie completa Log S&P500

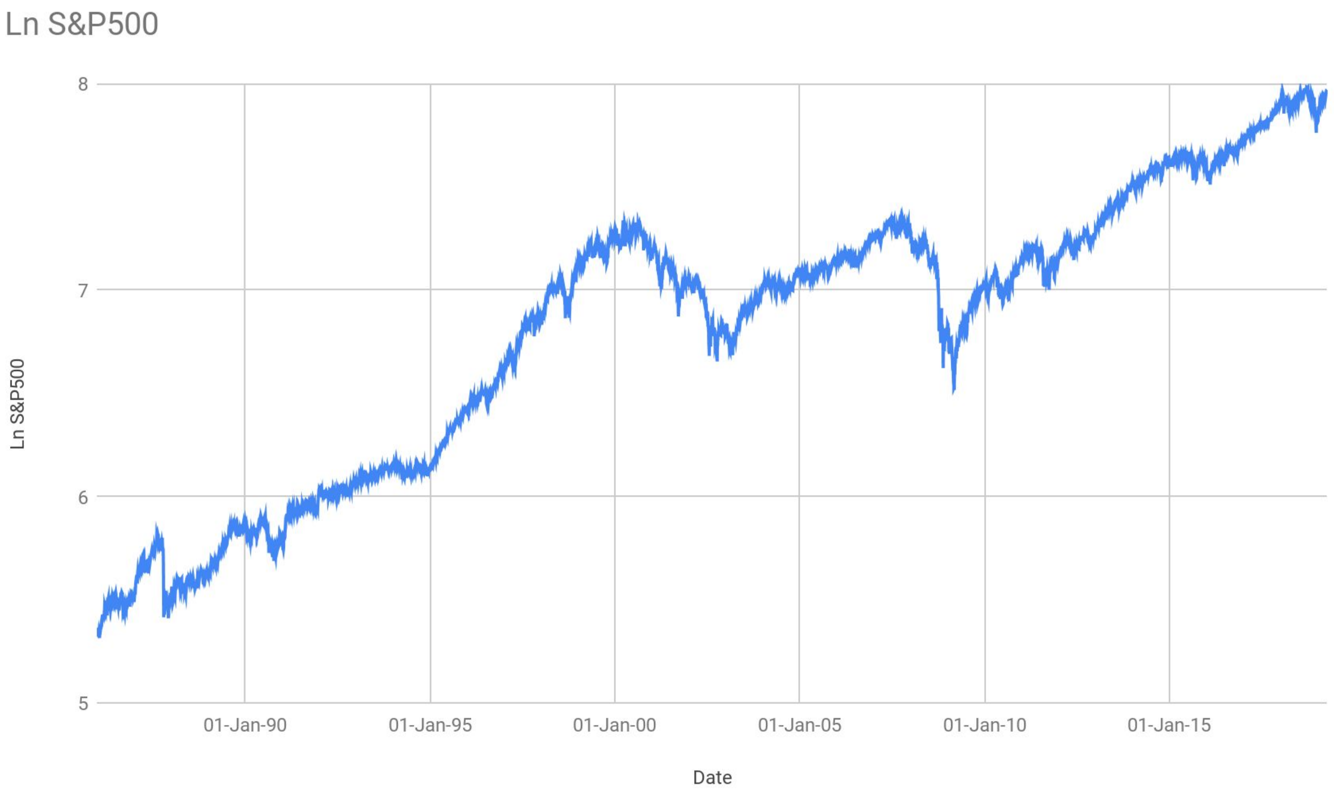


Fuente: www.macrotrends.net

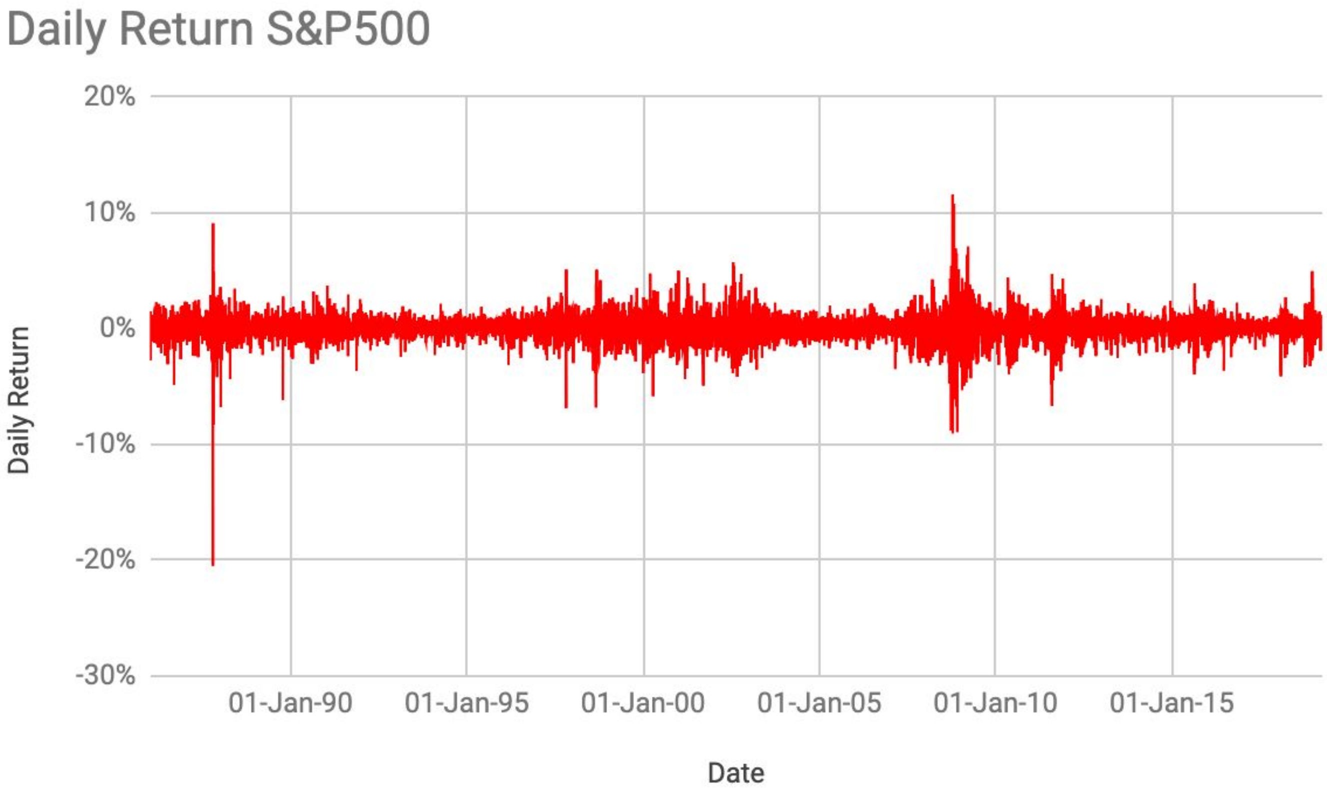
Serie de precios S&P500 (desde '86)

Fuente: CBOE

Serie de precios Ln S&P500 (desde ‘86)

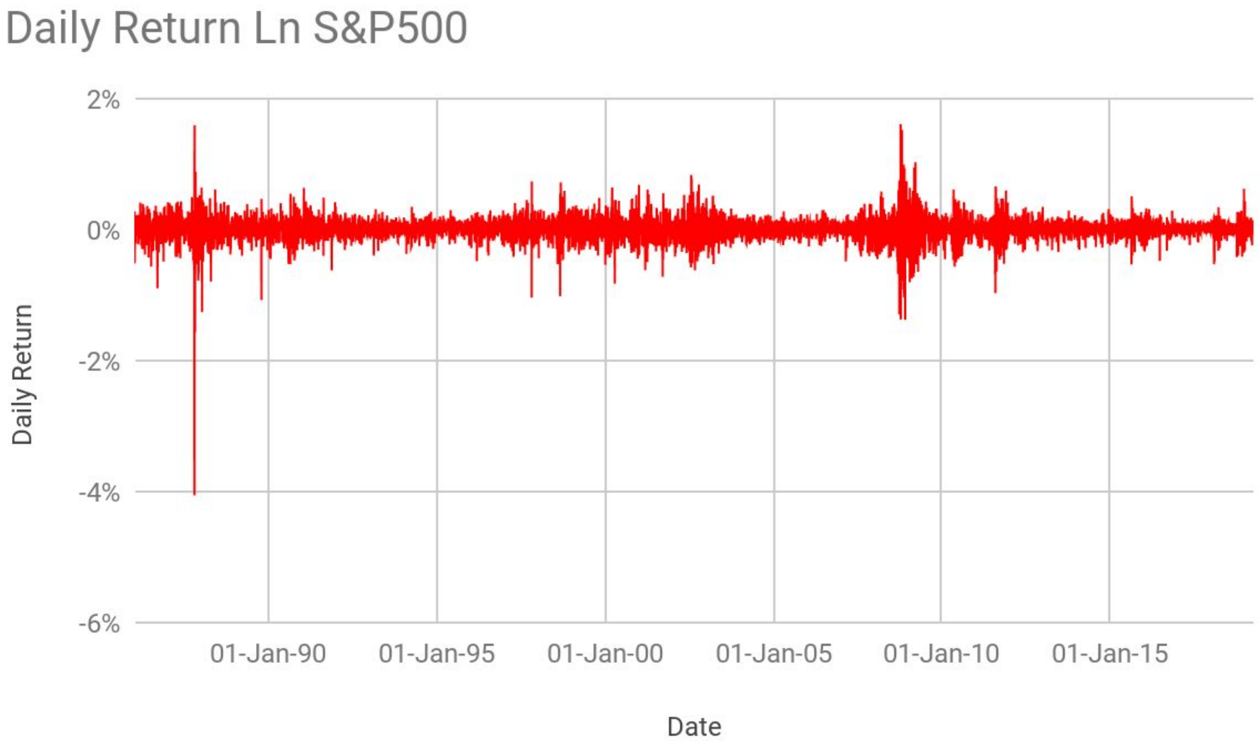


Serie de precios y distribución de retornos



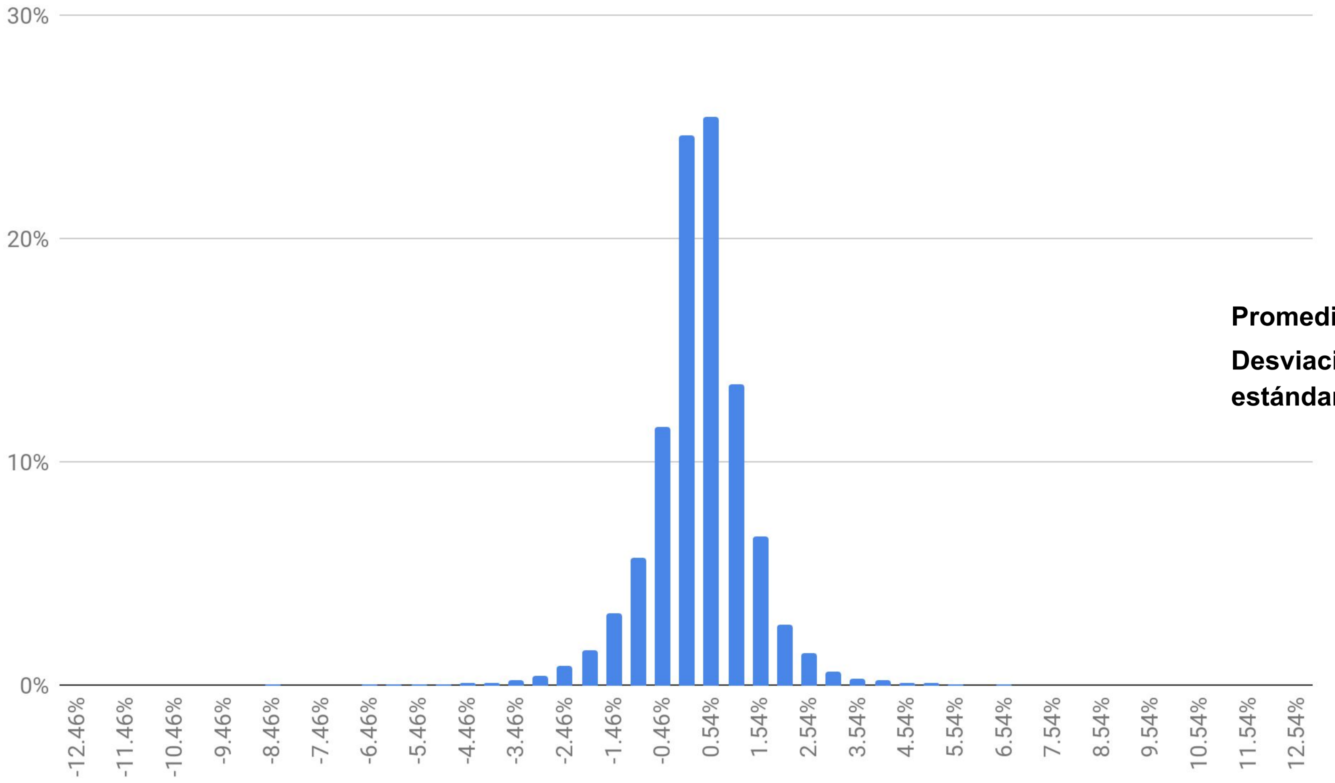
Promedio (μ)	0.04%
Desviación estándar (σ)	1.13%

Serie de precios y distribución de retornos



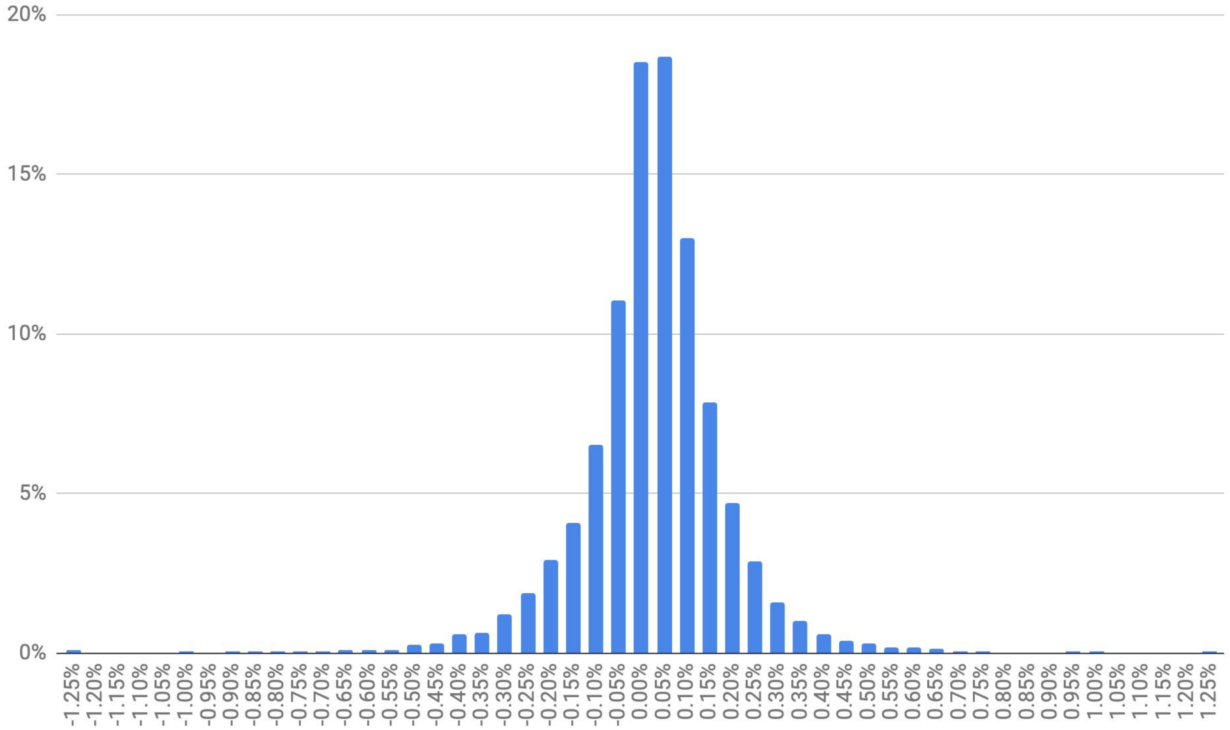
Promedio (μ)	0.0049%
Desviación estándar (σ)	0.1715%

Distribución de retornos S&P500



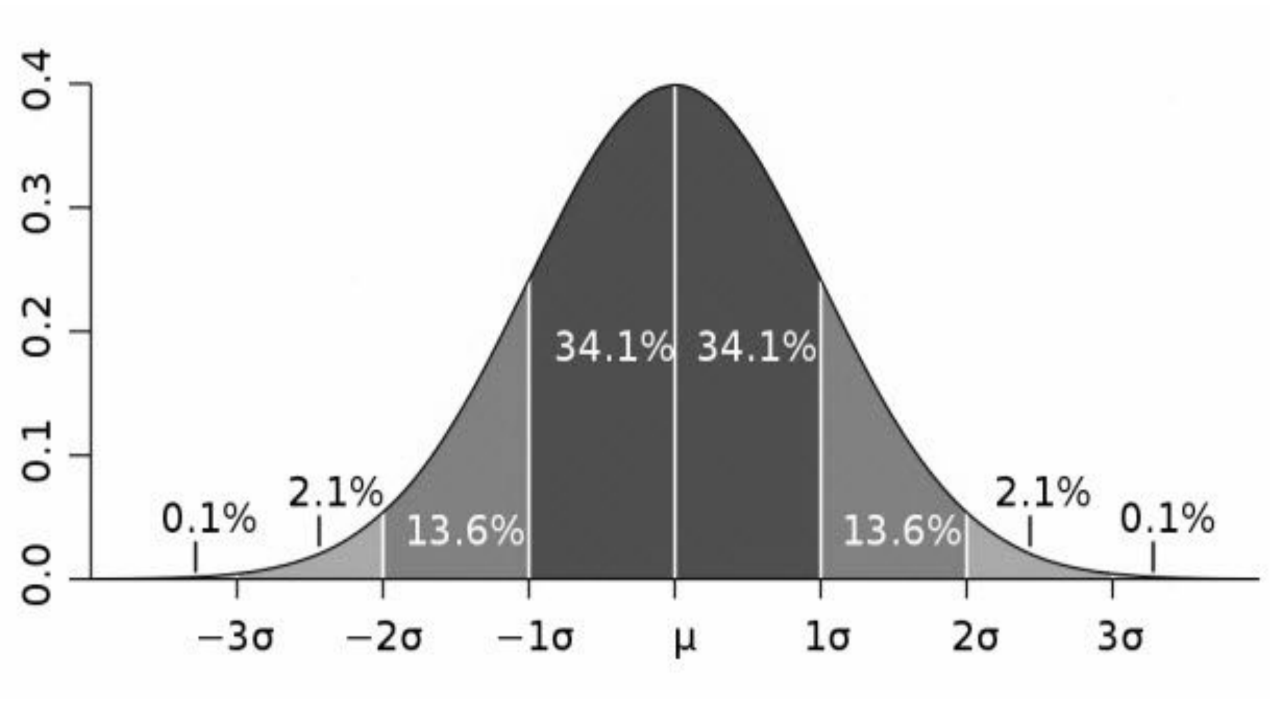
Promedio (μ)	0.04%
Desviación estándar (σ)	1.13%

Distribución de retornos Ln S&P500

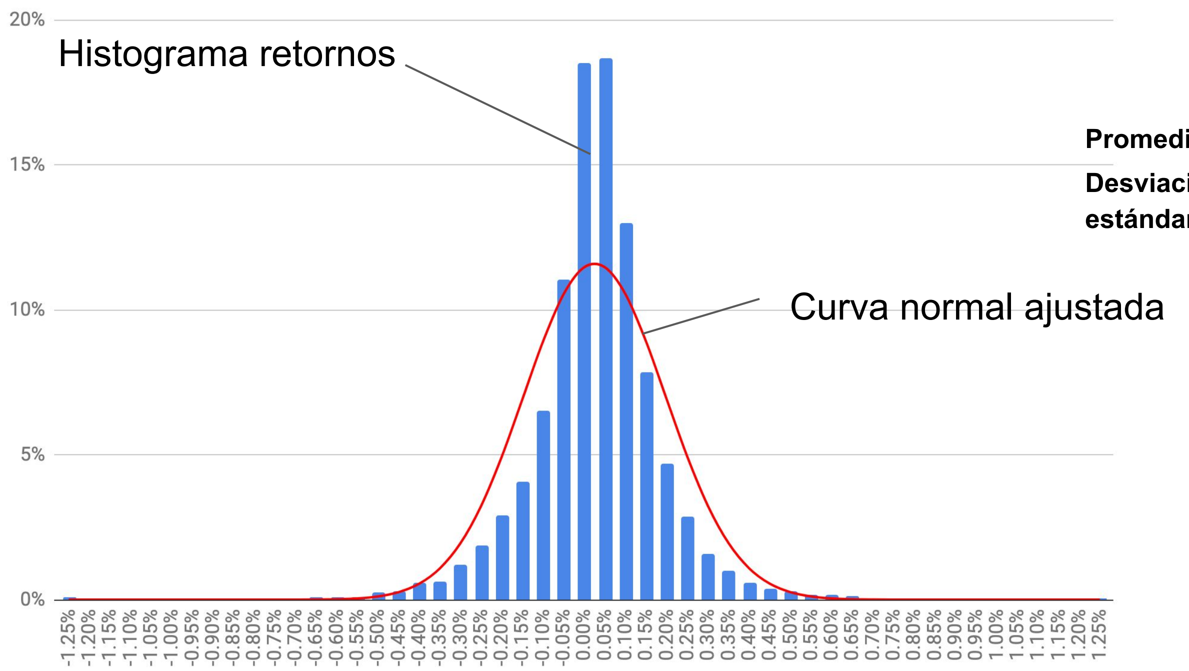


Promedio (μ)	0.0049%
Desviación estándar (σ)	0.1715%

Curva normal o Gaussiana



Distribución de retornos Ln S&P500



Promedio (μ)	0.0049%
Desviación estándar (σ)	0.1715%

Serie de precios y distribución de retornos

Es muy utilizado bajo el modelo tradicional ajustar los retornos de un activo a una **distribución normal**, lo que permite hacer cálculos más simples.

El **proceso estocástico** que modela el proceso del precio de un activo debiese ser, por tanto, algo similar a un modelo lognormal, es decir

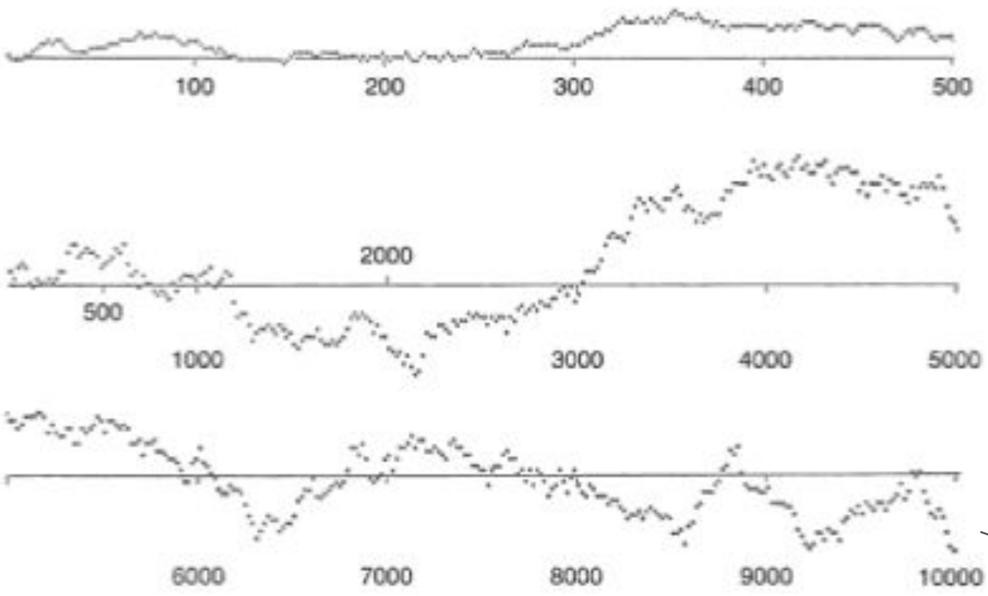
$$\ln(Precio(t)/Precio(0)) = \mu t + B(t)$$

Precio en el momento (t)

"Retorno medio"

Variable aleatoria normal
con media 0

Serie de precios y distribución de retornos



El registro de 10.000 lanzamientos de una moneda (cada paso es +1 o −1)

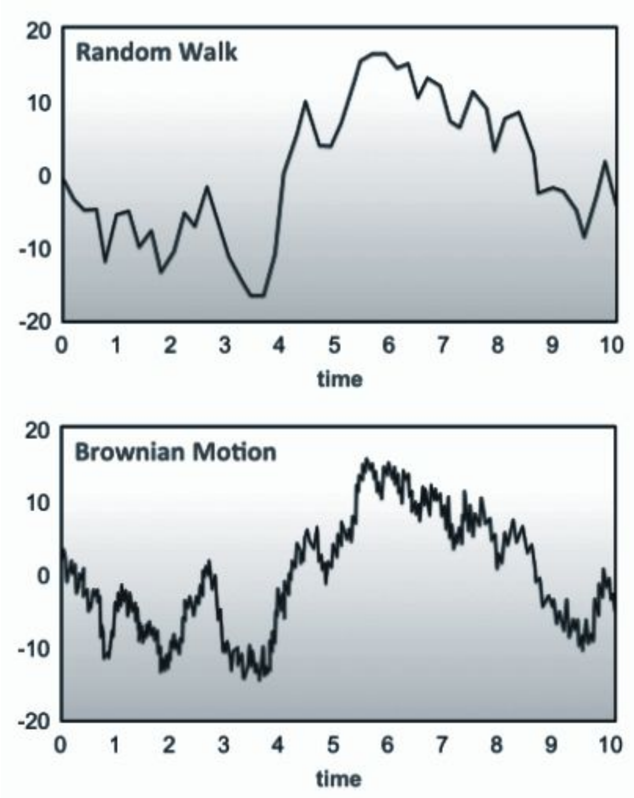
Fuente: The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence, Benoit Mandelbrot

One-dimensional random walk

Serie de precios y distribución de retornos

Se llama **proceso browniano** a un proceso B(t) caracterizado por:

1. **Incrementos independientes**: B(s+t) - B(s) no depende de lo que haya pasado hasta s
2. **Incrementos Gaussianos**: B(s+t) - B(s) ~ N(0, t)
3. **B es continuo c.s.**

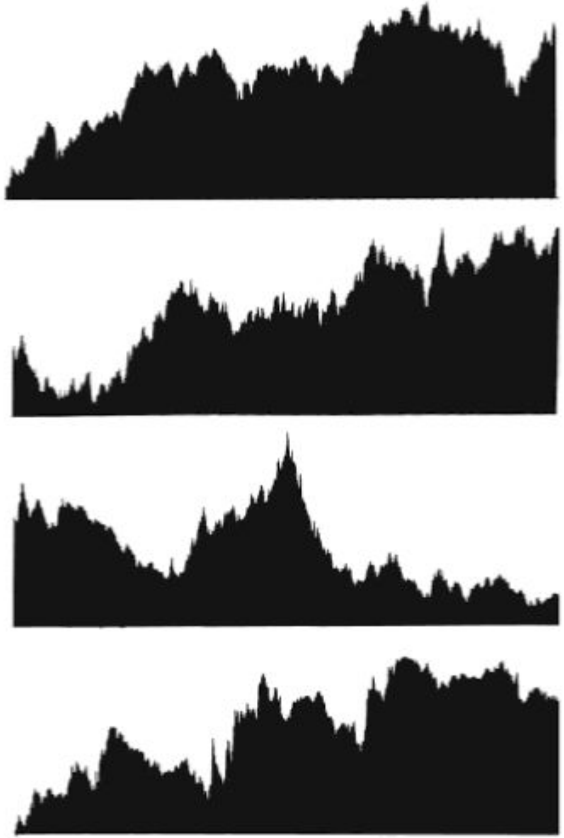


Intuitivamente, en el límite al hacer el paso de tiempo tender a 0, obtenemos un movimiento browniano

Serie de precios y distribución de retornos

Bajo la modelación tradicional, el incremento de precios futuro (variable aleatoria desconocida) sería modelado por una distribución lognormal de desviación estándar Δt y no dependería del pasado

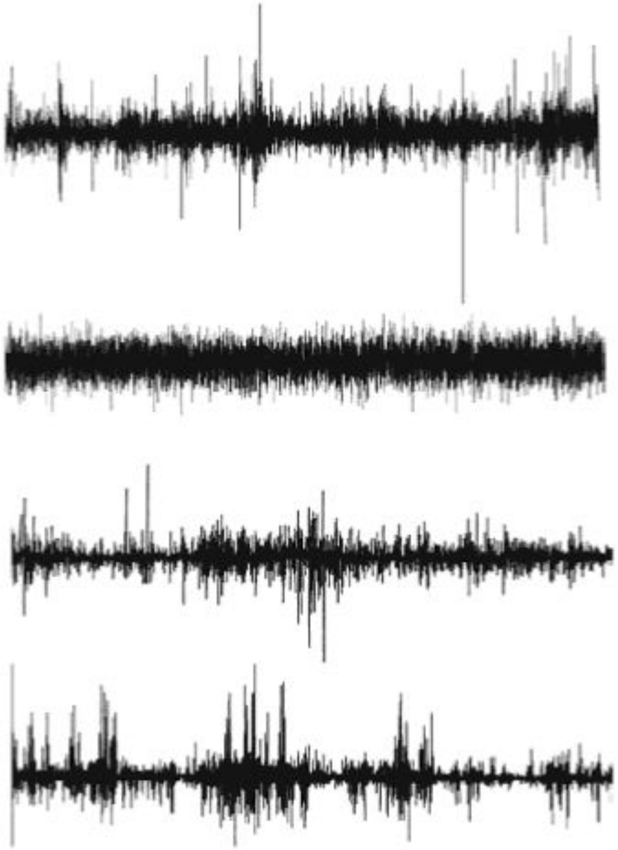
Serie de precios y distribución de retornos



4 series de precios, ¿cuál es falso?

Fuente: The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence, Benoit Mandelbrot

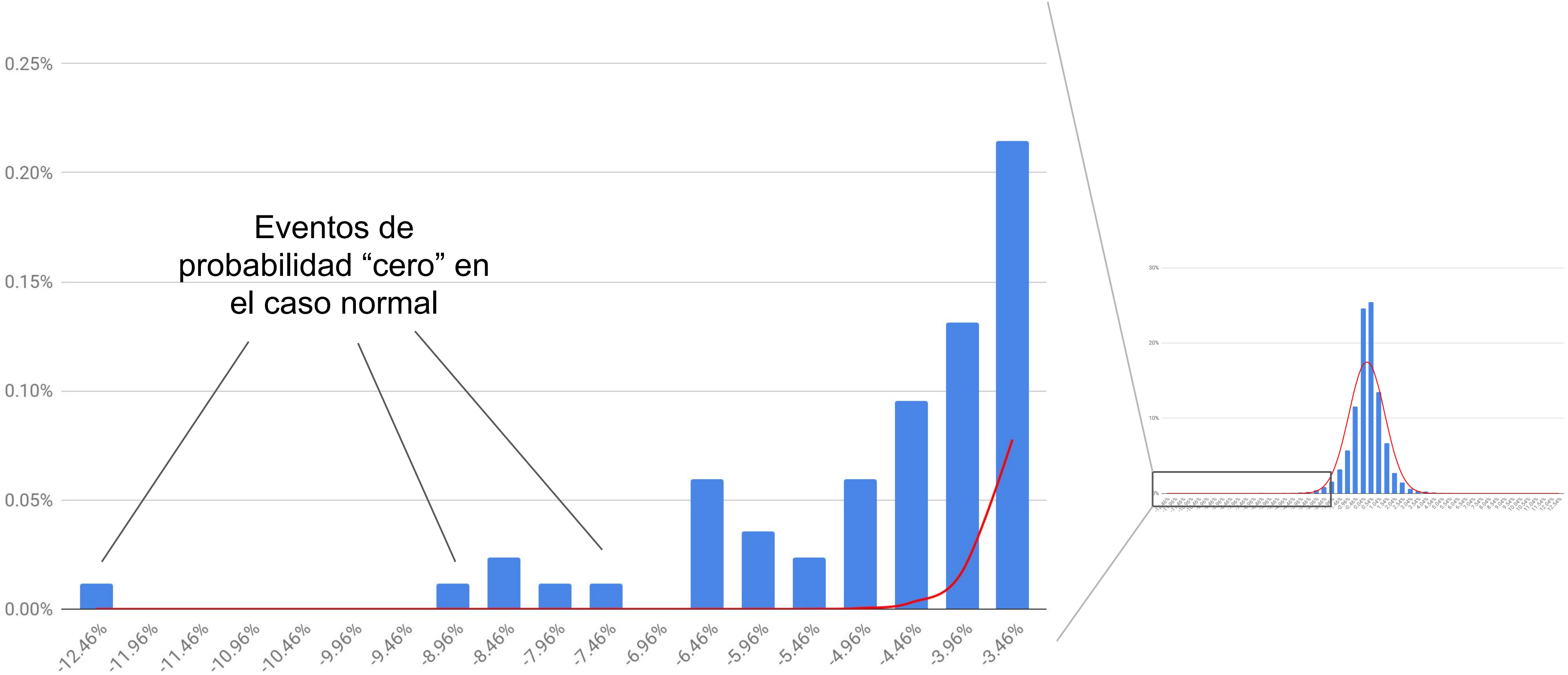
Serie de precios y distribución de retornos



Variación diaria de las series de precios. De nuevo, ¿cuál es falso?

Fuente: The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence, Benoit Mandelbrot

Fallas del modelo normal



Fallas del modelo normal

Eventos “**raros**” resulta ser que en la práctica no son tan raros.

Caídas diarias más agudas que -7% han sucedido **6 veces desde el año 1986** en el S&P500 hasta el 8 de abril de 2019 (8385 días de *trading,* algo más que 33 años).

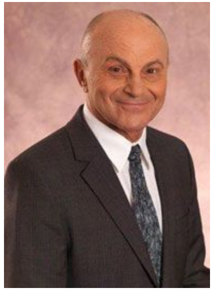
Sin embargo, según el ajuste normal, esto debería pasar **una vez cada 62171783144 días** de *trading* (una vez cada 246 millones de años).

Fallas del modelo normal

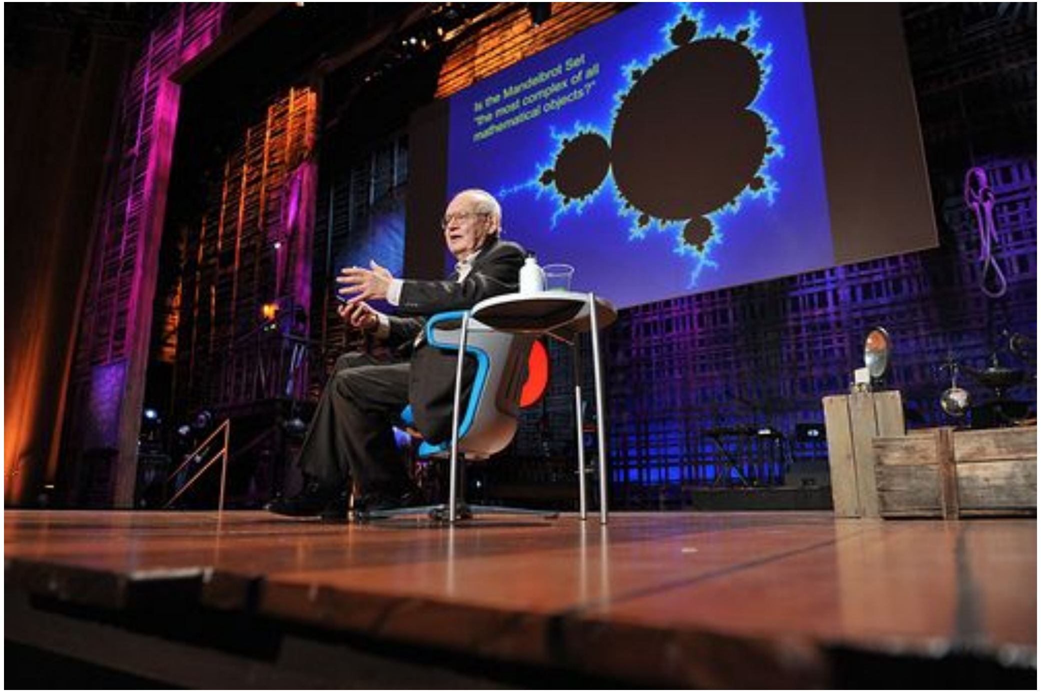
En inicios de 1960s, Benoit Mandelbrot, un matemático que enseñaba economía en University of Chicago, era advisor de un estudiante de doctorado llamado Eugene Fama.

Mandelbrot había desarrollado un modelo estadístico para estimar los retornos del precio del algodón mediante distribuciones que tenían “*fat tail*” (colas pesadas), es decir, el modelo asignaba probabilidades no triviales a porcentajes de retorno de grandes magnitudes.

Benoit Mandelbrot 

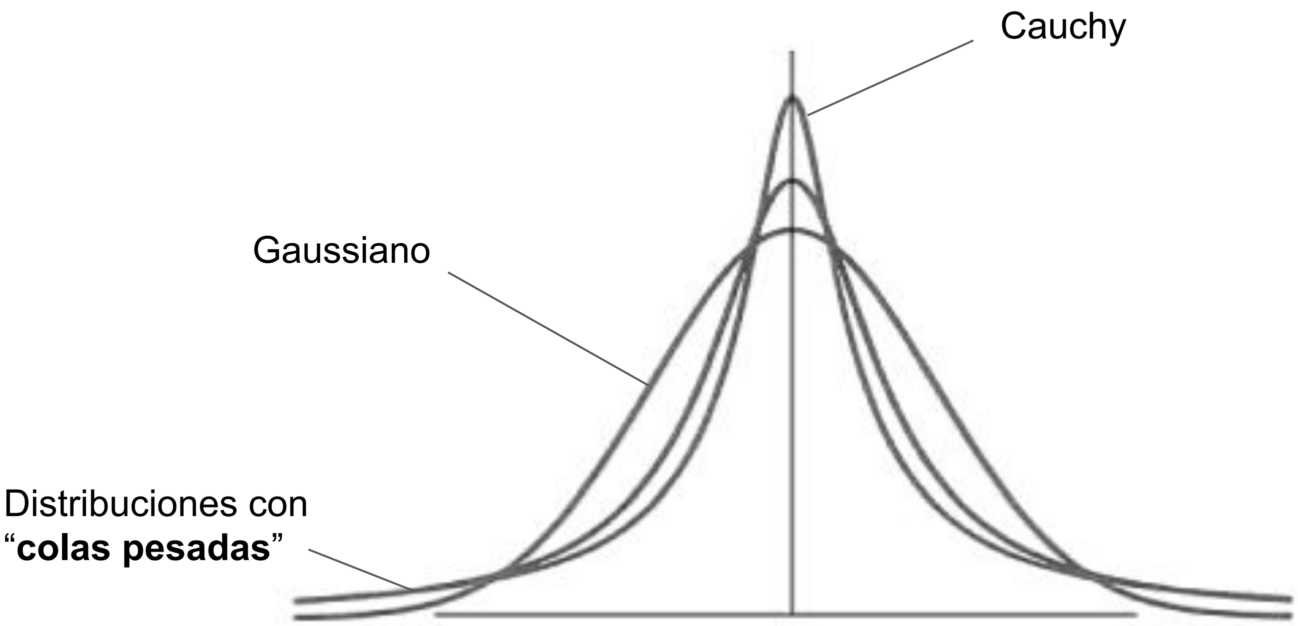
 Eugene Fama

Benoit Mandelbrot también es conocido por su definición de fractalidad...



...pero eso es
otro tema.

Otras distribución de retornos para modelar retornos



Fallas del modelo con incrementos independientes

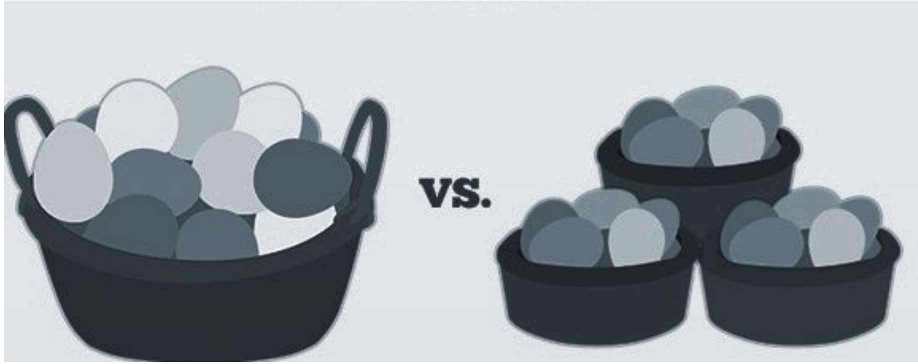
En general se detecta ausencia de correlación en la práctica, pero no ausencia de dependencia (recordar que sólo en el modelo normal correlaciones nulas implican independencia).

Son pocos los ejemplos, pero el más notable es el efecto de cambios de **momentum** en los precios. Momentum mide la aceleración del precio de un activo financiero, es decir, el cambio en la velocidad del movimiento de los precios. Cuando el momentum cambia, los activos tienden a moverse en la misma dirección con mayor probabilidad.

Diversificación

Diversificación

La diversificación es la mejor y más simple manera de reducir los riesgos de un portafolio de inversiones: en simple, no dejes todos lo huevos en el mismo canasto.



Diversificación de instrumentos financieros

Lo usual al diversificar es invertir capital en una forma que reduzca la exposición a un determinado activo o un determinado riesgo.

La forma más común es invertir en diversas empresas, de distintos sectores, y de distintos países.

En una inversión inmobiliaria, por ejemplo, es menos riesgoso invertir en dos departamentos de distintos edificios, que dos departamentos ubicados en el mismo edificio.

Diversificación intertemporal

Digamos que vas a invertir en una empresa que hace 1 proyecto al mes. Es una buena empresa pero no siempre sus proyectos son buenos: de 10 proyectos, en 6 les va bien y en 4 les va mal.

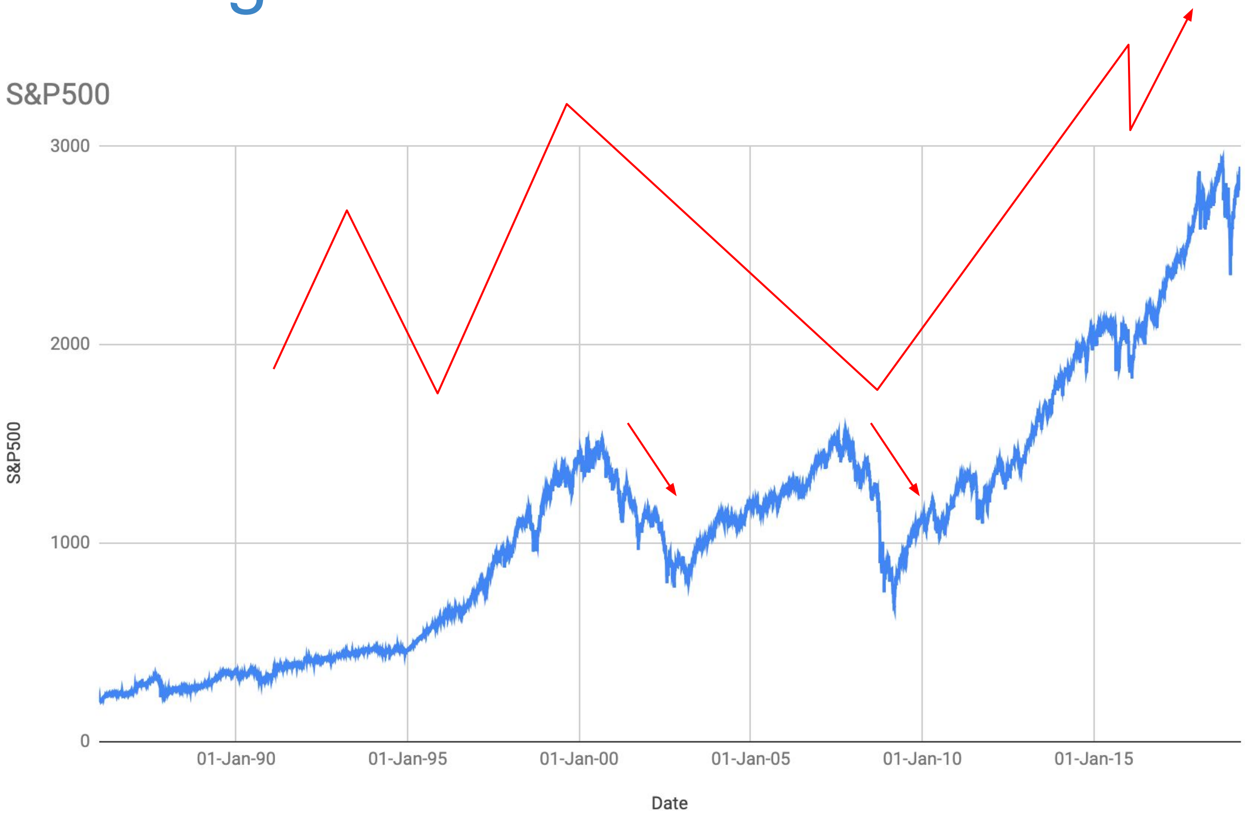
Cuando les va bien duplican lo invertido, cuando les va mal lo pierden todo. En este ejemplo si inviertes por 1 mes, puede que te vaya mal y lo pierdas todo.

Pero si inviertes durante 100 meses, lo más probable es que a ~60 proyectos les va a ir bien y a ~40 mal. Digamos que invertiste 1 millón: $400.000 se pierden en malos proyectos y $600.000 se duplican. ¿Cómo quedaste? con $1.200.000.

Medidas de riesgo de mercado

Cómo “medir” el riesgo de mercado?

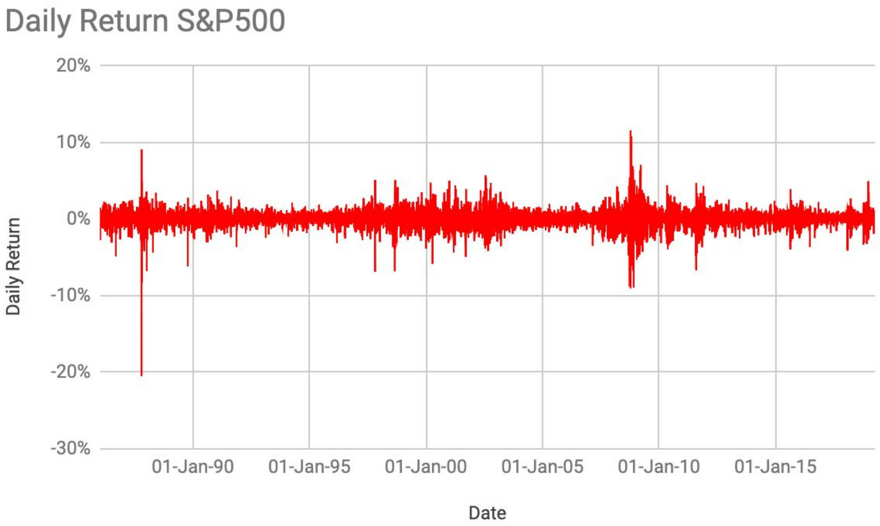
La idea es medir cuánto “riesgo” estoy tomando en un determinado activo



Volatilidad

Intuitivamente, la desviación estándar de los retornos, conocida como **volatilidad**, es una medida de cuánto "se mueve" el precio del activo.

$$\text{Volatilidad} = \sqrt{\frac{\sum (r_i - r_{avg})^2}{n-1}}$$



Promedio	0.04%
Desviación estándar	1.13%

Volatilidad

La volatilidad "respeta" la diversificación: si tenemos un portafolio compuesto por dos activos A y B, la volatilidad del portafolio es menor a la suma de la volatilidad de A y B por separado, ya que

$$
\begin{aligned}
\text{DesvEst}(A + B)^2 &= \text{Varianza}(A) + 2\ \text{Cov}(A,B) + \text{Varianza}(B) \\
&\leq \text{Varianza}(A) + 2\ \text{DesvEst}(A)\text{DesvEst}(B) + \text{Varianza}(B) \\
&= (\text{DesvEst}(A) + \text{DesvEst}(B))^2
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\mathbf{Vol(A+B) \leq Vol(A) + Vol(B)}$$

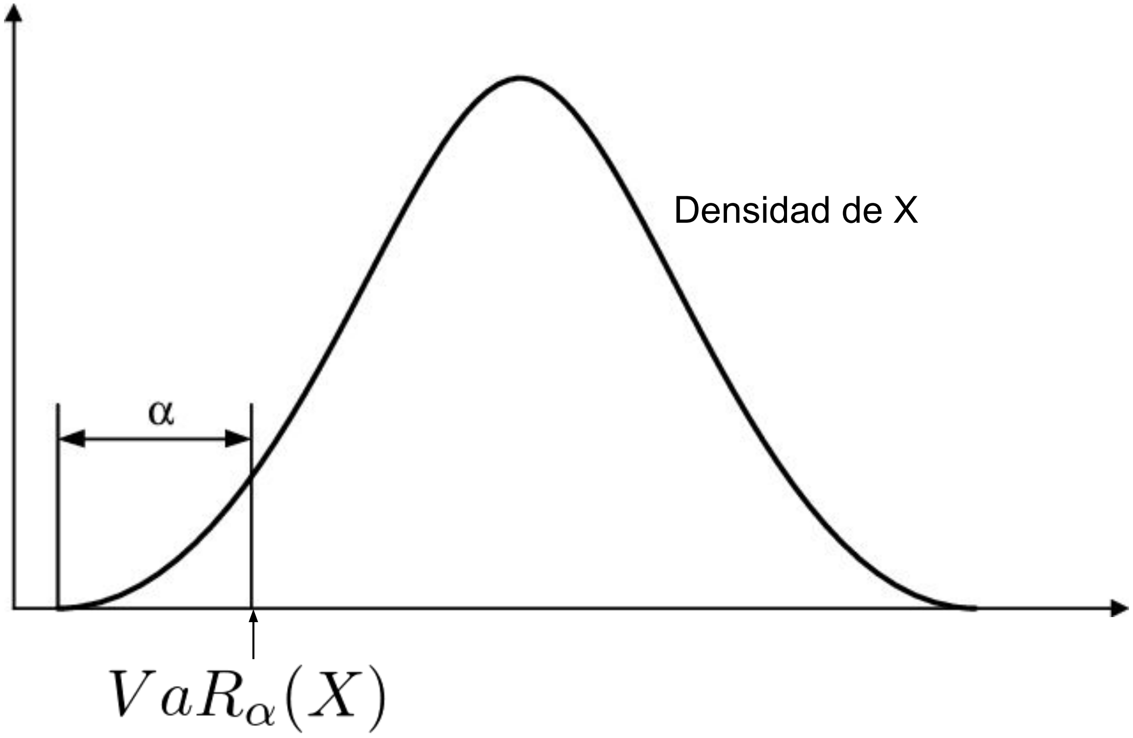
Medidas de riesgo de colas de la distribución

Value-at-risk (VaR): si F_X es la función de distribución de los retornos de X, y α un nivel de confianza

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \alpha\right\}$$

Por ejemplo, un portafolio tiene un VaR de 5% de $1 millón al día, significa hay una probabilidad de 5% de que un día el portafolio pierda $1 millón **o más**.

Medidas de riesgo de colas de la distribución



Es el **α**-percentil, es decir, el fin del área bajo la curva de la cola izquierda cuando alcanza el tamaño **α**

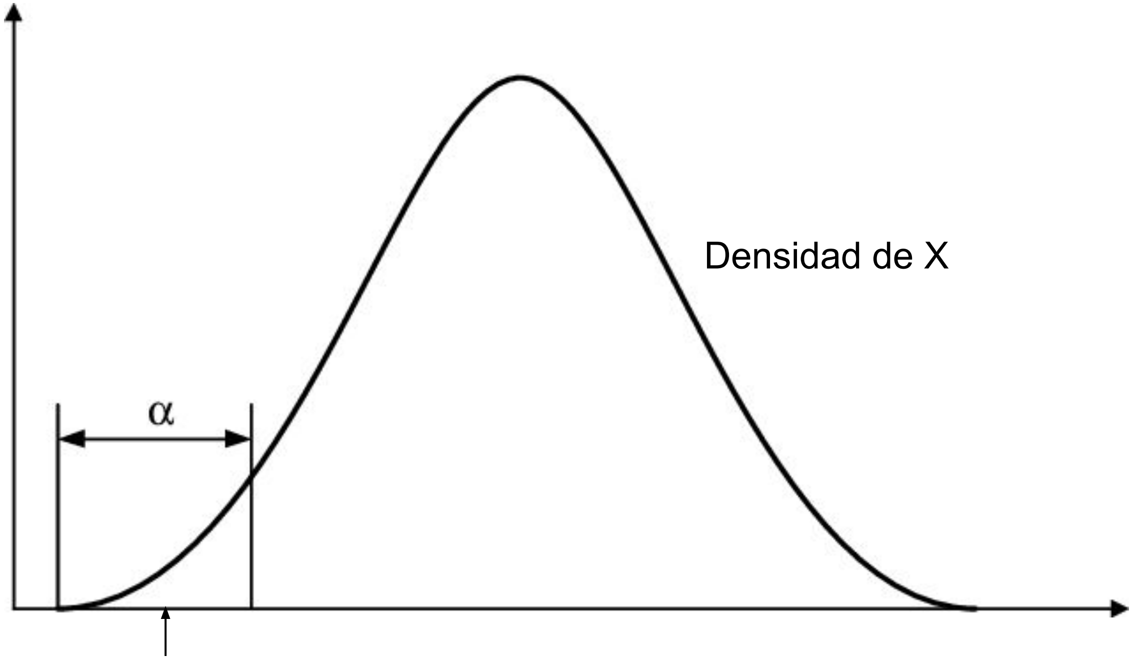
Medidas de riesgo de colas de la distribución

***Expected shortfall* (ES)**, **también conocido como VaR condicional o CVaR:** si F_X es la función de distribución de X, y α un nivel de confianza

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_\gamma(X)d\gamma$$

Por ejemplo, un portafolio tiene un ES de 5% de $1,2 millones al día, significa hay una probabilidad de 5% de que un día el portafolio pierda $1,2 millones **en promedio**.

Medidas de riesgo de colas de la distribución

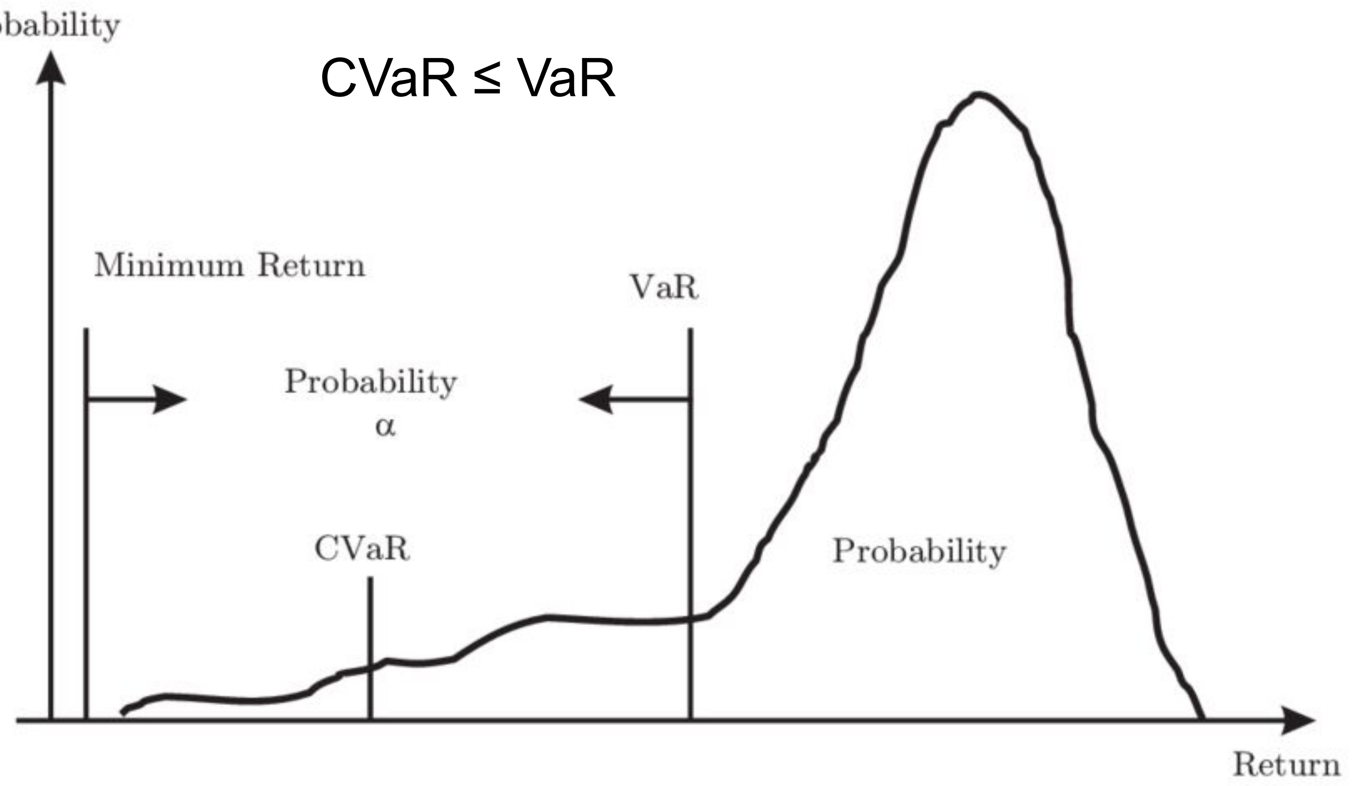


$$CVaR_{\alpha}(X)$$

Promedio de los valores del eje horizontal bajo la curva de la cola izquierda del percentil **α** (ponderados por la densidad)

Medidas de riesgo de colas de la distribución

CVaR ≤ VaR



¿Hay “buenas” medidas de riesgo de mercado?

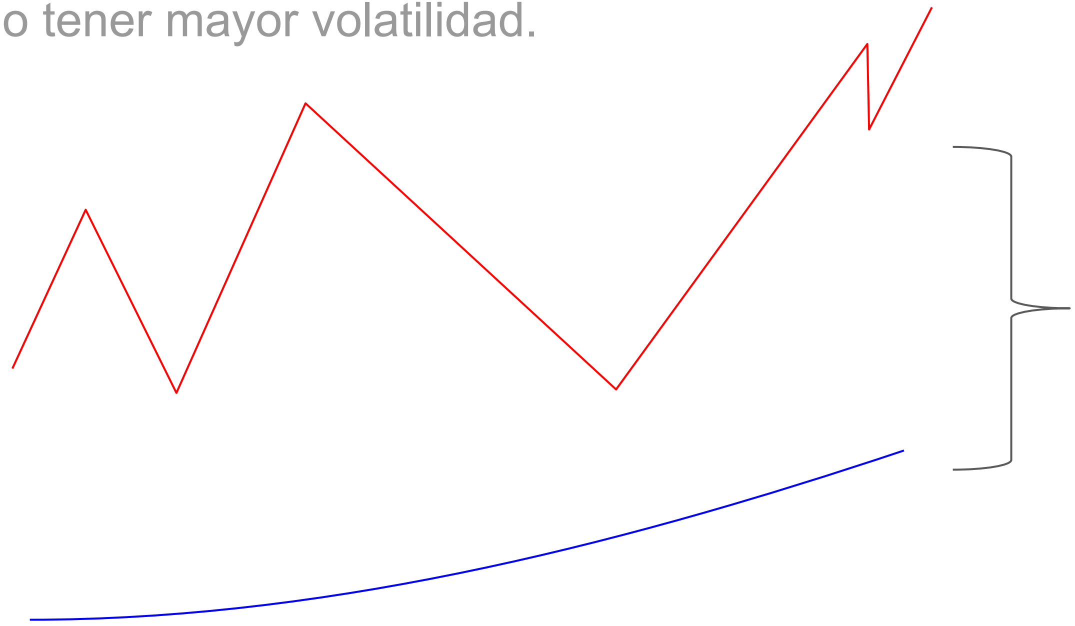
Medidas de riesgo coherentes

Una medida de riesgo ρ es coherente si

- $\rho(0) = 0$
- **Monótona**: si un portafolio X es c.s. mejor que otro Y, entonces $\rho(X) \leq \rho(Y)$
- **Sub aditividad (diversificación):** $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- **Positivo homogéneo:** para $\lambda \geq 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$
- **Invarianza bajo traslación:** si A garantiza un retorno a, $\rho(X+A) = \rho(X) - a$

La desviación estándar le falta monotonía...

Pueden haber portafolio que son claramente mejores que otros en cualquier caso, sin embargo tener mayor volatilidad.

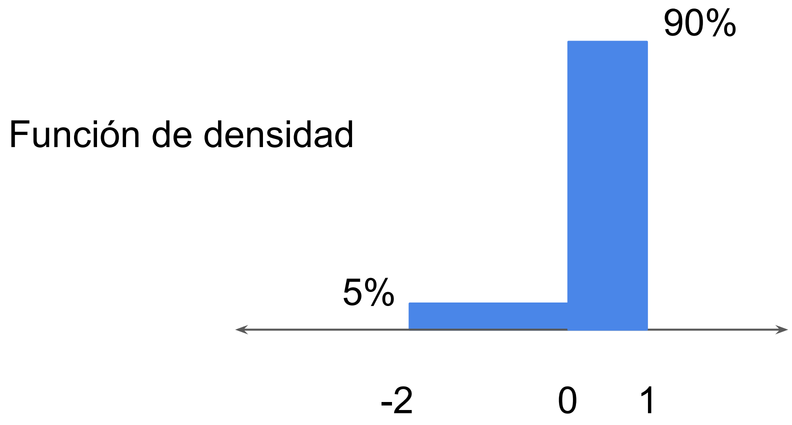


En este ejemplo el precio más volátil renta casi siempre mejor que otro con poca volatilidad

VaR no es una medida coherente en general

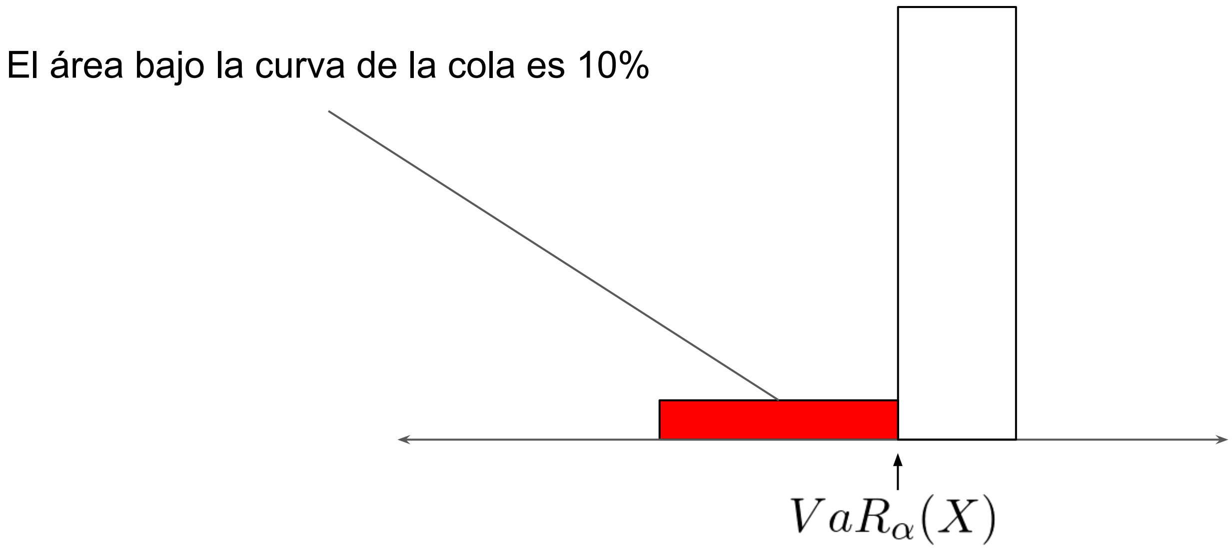
VaR no es coherente en general: no es subaditivo, implica que medir el riesgo usando VaR podría inducir portafolios poco diversificados.

Consideremos dos variables aleatorias i.i.d. X_1 y X_2 que con probabilidad 90% ganan un monto positivo entre [0, 1] y con 5% de probabilidad caen en [−2, 0].



VaR no es una medida coherente en general

Es fácil ver que $VaR_{10\%}(X_1) = VaR_{10\%}(X_2) = 0$.



VaR no es una medida coherente en general

Sin embargo $VaR_{10\%}(X_1+X_2) > 0$, ya que el evento de $(X_1+X_2 < 0)$ sucede más de un 10% de las veces, exactamente:

$$\mathbb{P}(X_1+X_2 < 0) = \mathbb{P}(X_1+X_2 < 0 \mid \text{ambos negativos}) + \mathbb{P}(X_1+X_2 < 0 \mid \text{ambos positivos}) + \mathbb{P}(X_1+X_2 < 0 \mid \text{uno negativo})$$

$$= (5\%)^2 \quad + \quad 0 \quad + \quad 2 \times \int_{x1 \in [-2,0]} \int_{x2 \in [0,1]} 1_{(X1+X2 < 0)}\, dF_1(x_1) dF_2(x_2)$$

$$= (5\%)^2 \quad + \quad 2 \times 5\% \times 90\% \times \int_{x1 \in [-2,0]} \int_{x2 \in [0,1]} 1_{(X1+X2 < 0)}\, dx_1 dx_2$$

$$= (5\%)^2 \quad + \quad 2 \times 5\% \times 90\% \times 3/2$$

$$= 13.75\%$$

VaR no es una medida coherente en general

Concluimos que usando VaR como medida de control no tenemos la capacidad de controlar el riesgo total de un portafolio controlando los riesgos individuales de cada instrumento financiero.

CVaR **sí** es una medida de riesgo coherente

Quedará como tarea :)