PAUTA CONTROL 1 MA12A-CALCULO

(11.5.98)

Pregunta 1.

1.- El producto $A = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$ es igual a

$A = (x^2 + y^2)u^2 + (x^2 + y^2)v^2 = (x^2u^2 + y^2u^2) + (x^2v^2 + y^2v^2)$

y también es igual a

$A = ((x^2u^2 + y^2v^2) + (x^2v^2 + y^2u^2)) + (2xuyv - 2xuyv)$

$\quad = (x^2u^2 + 2xuyv + y^2v^2) + (x^2v^2 - 2xuyv + y^2u^2)$

Pero, $x^2u^2 + 2xuyv + y^2v^2 = (xu + yv)^2$ y además $x^2v^2 - 2xuyv + y^2u^2 = (xv - yu)^2$

Luego $A = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2$

2.- Se sabe que $(xv - yu)^2 \geq 0$

Así, $A \geq (xu + yv)^2$. Aplicando raíz cuadrada se obtiene

$$\sqrt{x^2 + y^2} x \sqrt{u^2 + v^2} \geq |xu + yv|,$$

y como $|xu + yv| \geq xu + yv$ se obtiene la desigualdad.

3.- Para $x < 0$ la inecuación queda

$$|x^2 - 4| - x \leq -x \Leftrightarrow |x^2 - 4| \leq 0, \Leftrightarrow x = -2 \; o \; x = 2.$$

Como $x < \; 0 \Rightarrow x = -2$

Para $x \geq 0$ se tiene la inecuación $|x^2 - 4| - x \leq x$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 4| < 2x \Leftrightarrow -2x \leq x^2 - 4 \leq 2x$$

La primera inecuación es $x^2 + 2x - 4 \geq \; 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq \; 5 \Leftrightarrow |x + 1| \geq \sqrt{5}$ que tiene como solución

$$]-\infty^-, \sqrt{5} - 1] \cup [\sqrt{5} - 1, +\infty[, \text{ pero } x \geq \; 0,$$

Luego la solución de esta inecuación es $[\sqrt{5 - 1}, +\infty[$.

La segunda inecuación es $x^2 - 2x - 4 \leq \; 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \leq 5$

$\Leftrightarrow |x - 1| \leq \sqrt{5}$, que tiene como solución el intervalo

$[-\sqrt{5}+1, \sqrt{5}+1]$. como $x \geq 0$ esta solución es $[0, \sqrt{5}+1]$

Para que x satisfaga $|x^2-4| \leq 2x$ debe satisfacer simultáneamente, $x^2+2x-4 \geq 0$ y $x^2-2x-4 \leq 0$

Así, la solución a la inecuación $|x^2-4| \leq 2x$ es la intersección de $[0, \sqrt{5}+1]$ con $[\sqrt{5}-1, +\infty[$, que es $[\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1]$

Así, la solución de la inecuación original para $x \geq 0$ es $[\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1]$.
Por lo tanto la solución global es $[\sqrt{5}-1, \sqrt{5}+1] \cup \{-2\}$.

Pregunta 2. El Conjunto A es igual a

1.-

$$\{1+(\frac{-1}{2}), 2+(\frac{-1}{2})^2, 3+(\frac{-1}{2})^3, 4+(\frac{-1}{2})^4, 5+(\frac{-1}{2})^5\} \cap [\frac{1}{2}, 4.5[$$

$$= \{\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{4}, 3-\frac{1}{8}, 4+\frac{1}{16}, 5-\frac{1}{32}\} \cap [\frac{1}{2}, 4.5[=$$

$$= \{\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{4}, 3-\frac{1}{8}, 4+\frac{1}{16}\} \text{ pues } 5-\frac{1}{32} > 4.5$$

Este conjunto posee sup, inf, mín y máx dados por

$\inf(A) = \frac{1}{2} = \min(A)$ y $\sup(A) = 4+\frac{1}{16} = \max A$

2.-

a El conjunto es no vacío pues $0 \in A$, en efecto, $0 \geq 0$ y $0 = 0^2 \leq 2$.

b Está acotado superiormente por 2, pues si $x \in A, x \geq 0$ y $x^2 \leq 2$ luego $x^2 \leq 4$ y $x \geq 0$ así $x \leq 2$. Por Axioma del Supremo, el supremo de A existe.

c La primera propiedad dada dice que: un número $a > 0$ tal que $a^2 < 2$ no puede ser cota superior. Luego $l^2 \geq 2$. Supongamos que $l^2 > 2$. La segunda propiedad dice que existe $0 < c < l$ tal que $c^2 > 2$ Este c es una cota superior de A, En efecto, para $x \geq 0$ $x^2 \leq 2 < c^2$ Se concluye que $x > c$ para $x \in A$. Además, $l > c$ y l no sería supremo. Concluimos que $l^2 = 2$.

Pregunta 3.

1.- La condición para que la elipse y una recta $y = mx$ sean tangentes es que el sistema

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} \ = \ 1$
(2) $mx = y$
Tenga solución única en x, y

Reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx-d)^2}{b^2} \ = \ 1 \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2(mx-d)^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + a^2m^2)x^2 - 2a^2mdx + a^2d^2 = a^2b^2$$

Para que esta ecuación tenga solución única imponemos que su discriminante sea 0, esto es,

$$4a^4m^2d^2 = 4(b^2 + a^2m^2)(a^2d^2 - a^2b^2) \Leftrightarrow a^2m^2d^2 = (b^2 + a^2m^2)(d^2 - b^2)$$

La condición sobre m para que esto ocurra es:

$$a^2m^2d^2 = b^2(d^2 - b^2) + a^2m^2(d^2 - b^2) = b^2(d^2 - b^2) + a^2m^2d^2 - a^2m^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad b^2(d^2 - b^2 - a^2m^2) \ = \ 0$$

Así, m debe satisfacer $a^2m^2 = d^2 - b^2 \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{d^2-b^2}}{a}$ y $m_2 \ = \ - \ \frac{\sqrt{d^2-b^2}}{a}$

Para que las tangentes sean perpendiculares imponemos que $m_1m_2 = -1$
y vemos cual es el valor de d.

$\frac{(\sqrt{d^2-b^2})^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \pm\sqrt{a^2+b^2}$

Como deseamos $d > 0,$ concluimos $d = \sqrt{a^2+b^2}$

2.- La tangente a la parábola en $P = (x_0, y_0)$ es $yy_0 = 2p(x + x_0)$.

Esta corta al eje OY en el punto $B = (0, \alpha)$ donde α satisface $\alpha y_0 = 2p(x_0)$.
Como el punto $(0,0)$ no es considerado en este análisis y es el único con coordenada $x_0 = 0 \ \ o \ \ y_0 = 0,$

tenemos $\alpha = \frac{2p(x_0)}{y_0}$

La tangente corta al eje $0X$ en el punto $A = (\beta, 0)$ con β satisfaciendo $0 = 2p(\beta + x_0) \Leftrightarrow \beta = -x_0$.

Luego

$$A = (-x_0, 0) \ \text{ y } \ B = (0, \frac{2px0}{y0})$$

El punto medio tiene coordenadas x, y dadas por $x = \frac{-x_0}{2}; \frac{px_0}{y_0} = y$ como $y_0^2 = px_0$ obtenemos que $y^2 = \frac{p^2x_0^2}{y_0^2} = \frac{p^2x_0^2}{4px_0} = \frac{px0}{4} = \frac{p(-2x)}{4} = -\frac{px}{2}$

Luego el lugar geométrico es parte de la parábola de ecuación $y^2 = \frac{-p}{2}x$ Esta parábola tiene su vértice en (0, 0), directriz de ecuación $x = \frac{1}{8}$ y foco en $(-\frac{p}{8}, 0)$