PAUTA AUX Extra intro cálculo.

P2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$

PDQ: $-((-a)+b) = a-b.$

Recordamos que probar esto es análogo a justificar $((-a)+b)+(a-b)=0$

entonces tomamos

$[(-a)+b]+[a-b] =$ / definición y conmutatividad $(+)$

$= [b+(-a)]+[a+(-b)]$ / Asociatividad.

$= b+[(-a)+a]+(-b)$ / $\exists$ ~~neut~~ opuesto / Conmuta $-a+a=a+\ldots$

$= b+[a+(-a)]+(-b)$ / $\exists$ neutro $(+)$.

$= b+0+(-b)$ / $\exists$ opuesto

$= b+(-b)$

$= 0$

Entonces recordamos que dijimos que $a-b$ es el opuesto aditivo de $(-a)+b$, pero el opuesto aditivo de $(-a)+b$ es $-((-a)+b)$, entonces decimos el opuesto aditivo es único

Así que es un impostor!! $\Rightarrow -((-a)+b) = a-b$ $\blacksquare$

b) $|x_1 + x_2 + \dots x_{n-1} + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}| + |x_n|$

Si: $n = 1$

Caso base

$|x_1| \leq |x_1| \quad , \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$ ✓

Lo importante es manejar que significa asumir hasta un $k \in \mathbb{N}$ cualquiera

Hipótesis de inducción.

Para algún $k \in \mathbb{N}$

Se cumple.

$|x_1 + x_2 + \dots x_{k-1} + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \dots |x_{k-1}| + |x_k|$

Demostramos para caso $k+1$

$|\underbrace{x_1 + x_2 + \dots x_{k-1} + x_k} + x_{k+1}| \leq$

Usamos 

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$\Rightarrow$ |  $+ x_{k+1}| \leq |$  $| + |x_{k+1}|$

$\leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{k-1}| + |x_k| + |x_{k+1}|$ Paso inductivo.

Lo cual demuestra lo pedido! ☺

$\square$

c) Dem: $\frac{1}{x+1} \leq |x| + \frac{1}{|x-1|}$

Primero
$x \neq 1$
$x \neq -1$
$Dom = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

A Partir de

$$\frac{1}{x+1} \leq \left| x + \frac{1}{x-1} \right|$$

Usando Parte b)

$$\left| x + \frac{1}{x-1} \right| \leq |x| + \left| \frac{1}{x-1} \right| = |x| + \frac{1}{|x-1|}$$

transitividad

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq |x| + \frac{1}{|x-1|}$$

Ahora queremos ver el conjunto solución

Vamos lo siguiente:

$$\frac{1}{x+1} \leq |x| + \frac{1}{|x-1|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - |x| - \frac{1}{|x-1|} \leq 0$$

Vamos los puntos críticos de los ~~fun~~ $|\cdot|$ Así podemos trabajar con una mejor Expresión.

$|x| \to$ si $x > 0 \lor x < 0$

$|x-1| \to$ si $x > 1 \lor x < 1$

trabajamos

$-\infty \qquad 0 \qquad 1 \qquad \infty^+$

$(-x)$	(x)	(x)
$(1-x) = -(x-1)$	$-(x-1) = 1-x$	$(x-1)$

Caso 1 | $(-\infty, 0]$

$$\frac{1}{x+1} - -(x) - \frac{1}{-(x-1)} \le 0$$

$$\frac{1}{x+1} + x + \frac{1}{x-1} \le 0$$

$$\frac{(x-1) + x(x^2-1) + x+1}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

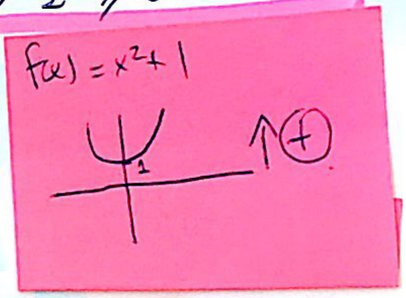
$$\frac{x-\cancel{x} + x^3 - \cancel{x} + \cancel{x} + \cancel{1}}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{x^3 + x}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{x(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

Recordar $x^2 \ge 0 \ /+1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 1 \ge 1 \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



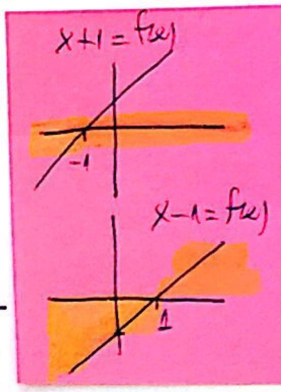
Cambio signos

$x = 0$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

	$-\infty$ — -1	-1 — 0	0 — 1	1 — ∞^+
x	−	−	+	+
x^2+1	+	+	+	+
$(x+1)$	−	+	+	+
$(x-1)$	−	−	−	+
	−	+	−	+



Sol inicial: $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$

Sol $= [(-\infty, -1) \cup [0,1)] \cap (-\infty, 0] = (-\infty, -1) \cup \{0\}$

+

−

Caso $x\in(0,1)$

$$\frac{1}{x+1} - x - \frac{1}{-(x-1)} \le 0$$

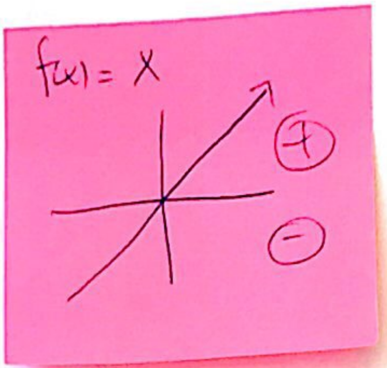
$$\frac{1}{x+1} - x + \frac{1}{(x-1)} \le 0$$

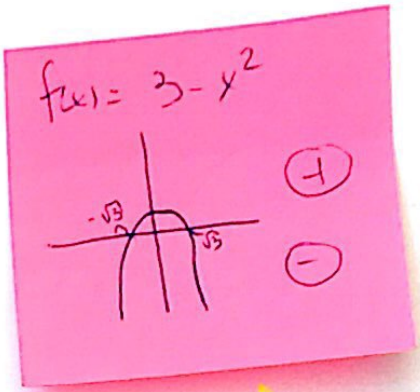
$$\frac{x-1-x(x^2-1)+x+1}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{x-\cancel{x}-x^3+x+x+\cancel{1}}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{3x-x^3}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{x(3-x^2)}{(x+1)(x-1)} \le 0$$





$x=0$

$3-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$\frac{x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

	$-\infty$ — $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ — -1	-1 — 0	0 — 1	1 — $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ — $\infty+$
x	−	−	−	+	+	+
$3-x^2$	−	+	+	+	+	−
$x+1$	−	−	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	+	+
	+	−	+	−	+	−

Solución inicial $[-\sqrt{3}, -1) \cup (0,1) \cup [\sqrt{3}, \infty+)$

$S_2 = [[-\sqrt{3},-1) \cup (0,1) \cup [\sqrt{3}, \infty+)] \cap (0,1) = (0,1)$

Caso $x \in (1, \infty^+)$

$\Rightarrow$

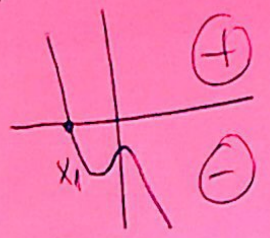
$$\frac{1}{x+1} - x - \frac{1}{(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{(x-1) - x(x^2-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x-1-x^3+\cancel{x}-\cancel{x}-1}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{-x^3+x-2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$f(x) = -x^3 + x - 2$



$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

	$-\infty$	x_1	-1	1	∞^+

	$(-\infty, x_1)$	$(x_1, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty^+)$
$-x^3+x-2$	+	−	−	−
$x+1$	−	−	+	+
$x-1$	−	−	−	+
	+	−	+	−

Solución inicial: $(x_1, -1) \cup (1, \infty^+)$

$S_3 = [(x_1, -1) \cup (1, \infty^+)] \cap (1, \infty^+) = (1, \infty^+)$

$\underline{S_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3}$ //

Scanned with CamScanner

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl