4) $A = (\overset{x_1}{x_0}, \overset{y_1}{y_0})$

$B = (\overset{x_2}{a}, \overset{y_2}{b})$

Definimos

Siempre es $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

LO IMPORTANTE ES SER CONSISTENTE. !!

$\Rightarrow \quad y - y_0 = \frac{b - y_0}{a - x_0}(x - x_0)$

$\Rightarrow \quad \frac{b - y_0}{a - x_0} = m_1$ } si busco la recta ortogonal

$\frac{b - y_0}{a - x_0} \cdot m_2 = -1$

$m_2 = \frac{x_0 - a}{b - y_0}$ → nueva pendiente

- Debe pasar por $C = (c, d)$

Ecuación punto pendiente.

$y - \bar{y} = m_2(x - \bar{x})$

$\bar{x} = c$

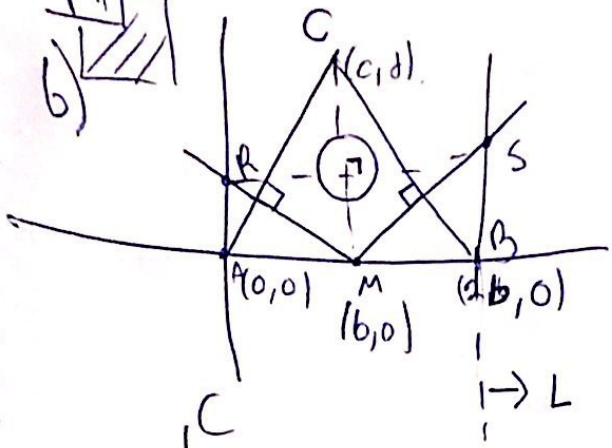
$\bar{y} = d$

$y - d = \frac{x_0 - a}{b - y_0}(x - c)$

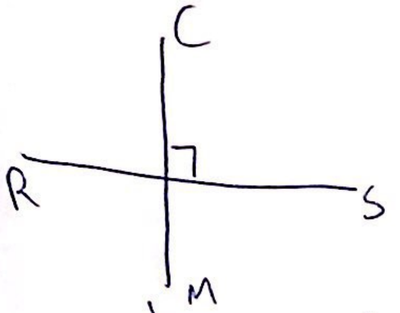
//

$\boxed{P1}$

b)



Considere este Δ.



PDQ. Esto se cumple.

Lo primero es ver los datos que me dan, y la información que puedo sacar de aquello. tengo $A(0,0)$ y $C(c,d)$ Así que puedo calcular su ecuación de la recta, en particular su pendiente.

$$A\begin{pmatrix} x_1, & y_1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$
$$C\begin{pmatrix} x_2, & y_2 \\ c, & d \end{pmatrix}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - 0 = \frac{d-0}{c-0}(x-0) \Rightarrow \underline{y = \overset{m}{\frac{d}{c}} x} \quad m\ \overline{AC}$$

Además tenemos $M = (b, 0)$ y sabemos que

$$\overline{AC} \perp MR \Rightarrow m\,\overline{MR} = -\frac{c}{d}$$

Ecuación punto$_{m}$

$$\Rightarrow \quad y - 0 = -\frac{c}{d}(x - b) \Rightarrow \underline{y = -\frac{c}{d}(x-b)} \quad m\ \overline{MR}.$$

Si $x=0$ obtenemos coordenada R

$$\Rightarrow y = -\frac{c}{d}(-b) = \frac{cb}{d} \Rightarrow R = \left(0, \frac{cb}{d}\right)$$

Análogo para S.

Ecuación punto punto

~~MS~~ C , B

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} & x_1 \; y_1 \\ & B(2b, 0) \\ & C(c, d) \\ & x_2 \; y_2 \end{matrix} \Rightarrow \quad y - 0 = \frac{(d-0)}{c-2b}(x - 2b)$$

$$\boxed{y = \frac{d}{c-2b}(x - 2b)} \quad m \; \overline{CB}$$

Si ~~$x = 2b$ SACO~~

$$-\frac{(c-2b)}{d} = m \quad \perp$$

Ecuación punto - pendiente.

$$M(b, 0) \;, \; m = \frac{c-2b}{-d}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{c-2b}{-d}(x - b)$$

Si $x = 2b \Rightarrow$ Coordenadas de S.

$$y = \frac{c-2b}{-d}(2b - b) = (c-2b)\frac{b}{-d}$$

$$S = \left(2b, (c-2b)\frac{b}{-d}\right)$$

tomo C y M y saco pendiente

$$C = (\overset{x_1}{c}, \overset{y_1}{d})$$

$$M = (\overset{x_2}{b}, \overset{y_2}{0}) \Rightarrow m_{1} = \frac{0-d}{b-c} = \frac{d}{c-b}$$

tomo R y S y saco ~~pendiente~~. pendiente.

$$S = \left(\overset{x_1}{2b}, \overset{y_1}{(c-2b)\frac{b}{-d}}\right)$$

$$R = \left(\overset{x_2}{0}, \overset{y_2}{\frac{cb}{d}}\right)$$

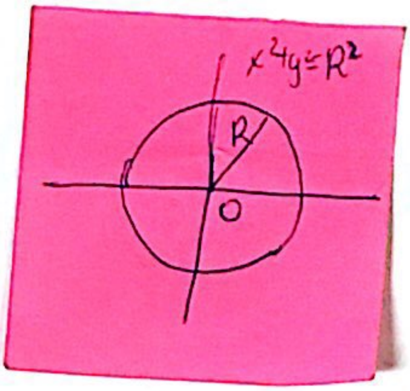
$$m_{2} = \frac{\frac{cb}{d} + (c-2b)\frac{b}{d}}{0-2b} = \frac{\frac{b}{d}\left(c+c-2b\right)}{-2b} = \frac{\frac{2b}{\cancel{-2b}d}}{}(c-b)$$

$$= \frac{-c+b}{d}$$

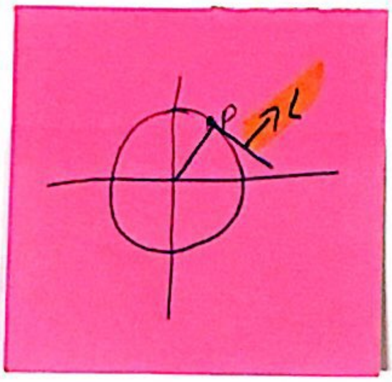
$$m_1 \cdot m_2 = \frac{d}{c-b} \cdot -\frac{(c-b)}{d} = -1 \quad \boxed{\square}$$

c) Sea la $\odot_1$

$$x^2+y^2=R^2, \quad R>0$$



$P=(x_0,y_0)\in \odot_1$



$\Rightarrow x_0^2+y_0^2=R^2$

Encontrar L, que pasa por P

O. origen $O=(0,0)$

$m_1 \to$ Entre O, P $\quad P=(\overset{x_2}{x_0},\overset{y_2}{y_0})$

$O=(\overset{x_1}{0},\overset{y_1}{0})$

$$m_1=\frac{y_0-0}{x_0-0}=\frac{y_0}{x_0} \to \text{ortogonal = perpendicular}$$

$$\frac{y_0}{x_0}\cdot m_2=-1$$

$$m_2=\frac{-x_0}{y_0}$$

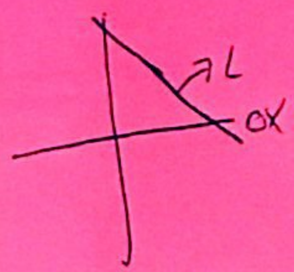
Ahora buscamos que pase por $P=(x_0,y_0)$

Ecuación punto pendiente.

$$L: \boxed{y-y_0=\frac{-x_0}{y_0}(x-x_0)}$$

Siempre imaginen lo que hacen.

b) Calcule Q donde L intersecta OX en función x_0 y R



$$L: y - y_0 = \frac{-x_0}{y_0}(x - x_0)$$

intersecta en OX cuando $y=0$.

$$y=0 \Rightarrow -y_0 = \frac{-x_0}{y_0}(x - x_0)$$

$$-y_0^2 = -x_0 x + x_0^2$$

$$\frac{-y_0^2 - x_0^2}{-x_0} = x \quad = \frac{y_0^2}{x_0} + x_0 = x.$$

$$Q = \left(\frac{y_0^2}{x_0} + x_0, 0\right)$$

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2$$

$$y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2} \Rightarrow$$

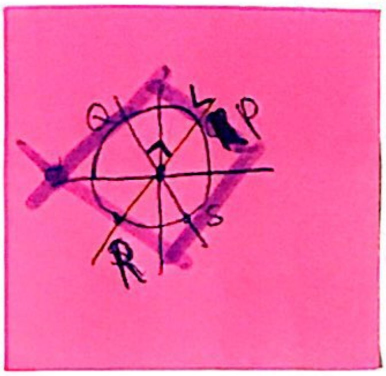
$$Q = \left(\frac{R^2 - x_0^2}{x_0} + x_0, 0\right)$$

$$Q = \left(\frac{R^2}{x_0} - \cancel{x_0} + \cancel{x_0}, 0\right)$$

$$\boxed{Q = \left(\frac{R^2}{x_0}, 0\right)}$$

P2) Considere $x^2+y^2=1$

Una recta variable L que pasa por el origen!



en particular si el punto donde intersecta es $(x_0, y_0)=R$ ↗ por ejemplo, $x_0, y_0 > 0$
el otro punto es simétrico respecto al origen $(-x_0, -y_0)$

La ecuación tangente a $P=(\alpha, \beta)$ a $x^2+y^2=r^2$ es $x\alpha + y\beta = r^2$

La matica se Acerca
→ Recomiendo siempre ir mirando el dibujo para
⇒ no perderse.

Primero veamos que el punto P, y como L pasa por el origen tiene la forma $L: y = mx$

y como $L' \perp L \Rightarrow L': y = \frac{-1}{m}x$

Ahora 2 puntos de $L \in \odot$

$$\Rightarrow x^2+y^2=1 \text{; si } y=mx \Rightarrow x^2+m^2x^2=1$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\text{si } x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \Rightarrow y = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$

Luego por simetría

$$R = \left(\frac{-1}{\sqrt{1+m^2}} , \frac{-m}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

haciendo lo mismo para encontrar Q

$$y = \frac{-1}{m} x$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 , \text{ si } y = -\frac{1}{m} x$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{m^2} x^2 = 1$$

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{m^2} \right) = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{\left(\frac{1+m^2}{m^2} \right)} = \frac{m^2}{1+m^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}}$$

$$y = -\frac{1}{m} x \Rightarrow y = -\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}\sqrt{1+m^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\Rightarrow Q = \left(\frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}} , \frac{-1}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{-m}{\sqrt{1+m^2}} , \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

Ocupando la indicación con $r = 1$

P y Q

P] $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} x + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} y = 1$ Q] $\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} x + \frac{-y}{\sqrt{1+m^2}} = 1$

multiplicamos por $\sqrt{1+m^2}$ ambas, antes de ordenarla elevando al cuadrado.

$\Rightarrow$

P| ~~$x + my =$~~

$(x + my)^2 = 1+m^2$

Q|

$(mx - y)^2 = 1+m^2$

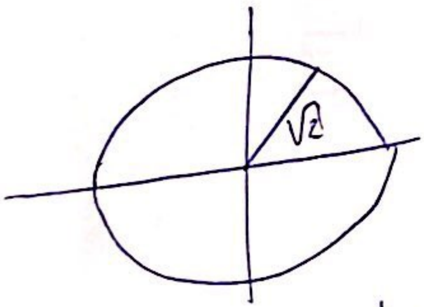
$\Rightarrow$ sumando

$$x^2 + \cancel{2mxy} + m^2y^2 + m^2x^2 - \cancel{2mxy} + y^2 = 2(1+m^2)$$

$$x^2\cancel{(1+m^2)} + y^2\cancel{(1+m^2)} = 2\cancel{(1+m^2)}$$

$$x^2+y^2 = 2$$

$\Rightarrow$

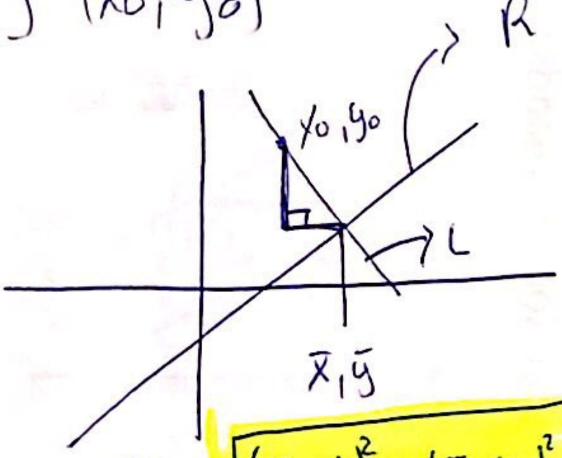


Con lo que podemos despejar P, Q, R, S]]

P3

$R: Ax + By + C = 0$

$y \ (x_0, y_0)$



$$Ax + By + C = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Nicho $\quad \sqrt{(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2} = d.$

$$m_1 = -\frac{A}{B}$$

$$m_2 \perp m_1$$

$$m_2 = \frac{B}{A}$$

$$R: y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

$$L: \quad y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{B}{A}x - \frac{Bx_0}{A} + y_0$$

intersecado

$$\Rightarrow \quad \frac{B}{A}x - \frac{Bx_0}{A} + y_0 = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

$$x\left(\frac{B}{A} + \frac{A}{B}\right) = \frac{Bx_0}{A} - y_0 - \frac{C}{B}$$

$$x(A^2 + B^2) = B^2x_0 - ABy_0 - AC$$

$$\bar{x} = \frac{B^2x_0 - ABy_0 - AC}{A^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{A^2C + A^2By_0 - AB^2x_0}{(A^2 + B^2)\ B} - \frac{C}{B}\frac{(A^2+B^2)}{(A^2+B^2)}$$

$$\bar{y} = \frac{A^2By_0 - AB^2x_0 - CB^2}{(A^2+B^2)\ B} = \frac{A^2y_0 - ABx_0 - CB}{A^2 + B^2}$$

Luego con el punto de intersección entre R y L.

Sacamos distancia con pitágoras

Dicho

$$\sqrt{\left(\frac{B^2 x_0 - AB y_0 - AC}{A^2+B^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{A^2 y_0 - AB x_0 - CB}{A^2+B^2} - y_0\right)^2} \cdots$$

$$= \sqrt{\frac{(\cancel{B^2 x_0} - AB y_0 - AC - x_0 A^2 - \cancel{x_0 B^2})^2}{(A^2+B^2)^2} + \frac{(\cancel{A^2 y_0} - AB x_0 - CB - \cancel{y_0 A^2} - y_0 B^2)^2}{(A^2+B^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-A)^2 (B y_0 + C + x_0 A)^2}{(A^2+B^2)^2} + \frac{(-B)^2 (A x_0 + C + y_0 B)^2}{(A^2+B^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{(A^2+B^2)}(B y_0 + C + x_0 A)^2}{(A^2+B^2)^{\cancel{2}}}} = \frac{|B y_0 + C + x_0 A|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

//

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl