

Imyectividad

Sobreyectividad

Sea $f: A \rightarrow B$

$\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$

Lo importante
Es la interpretación
Rec = Cod



Biyectiva \Leftrightarrow inyectiva

1a 1

1 sobreyectiva

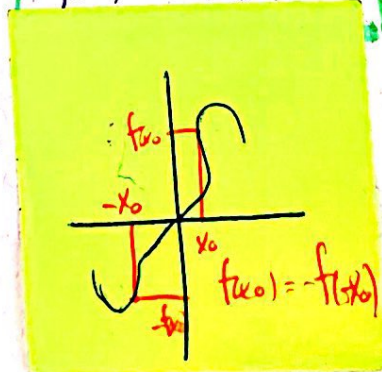
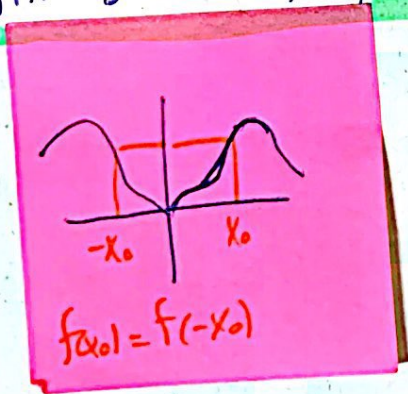
Rec = Cod

Ceros: $Z(f) := \{x \in \text{Dom}(f), f(x) = 0\}$



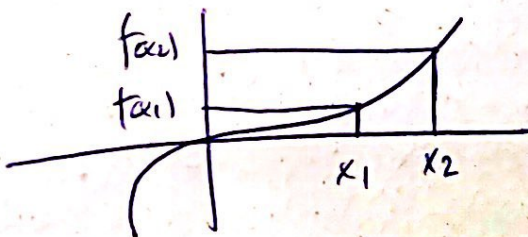
PAR: Sea $f(x), f(x) = f(-x)$

IMPAT: Sea $f(x)$
 $f(x) = -f(-x)$

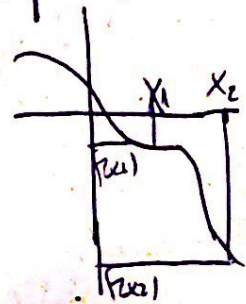


Crecimiento Sea $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$

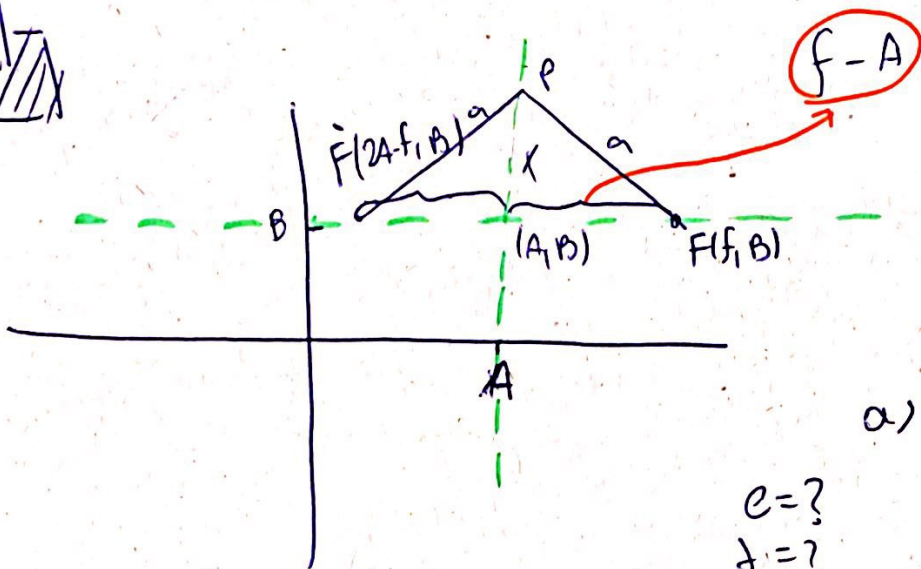


creciente
(no necesariamente
estricto.)



decreciente.

①



$$f - (f - A) - (f - A)$$

$$f - f + A - f + A$$

$$\underline{2A - f}$$

a) $f - A$

$e = ?$
 $b = ?$

$C(A, B)$. // Calculamos con pitágoras el valor del semi-eje menor. semi-eje menor.

$$x^2 + (f - A)^2 = a^2$$

$$x = \sqrt{a^2 - (f - A)^2} \quad \underline{x > 0}$$

⇒ Ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - (f - A)^2} = 1$$

$$\Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 - (a^2 - (f - A)^2)}}{a} = \frac{f - A}{a} \quad \underline{< 1}$$

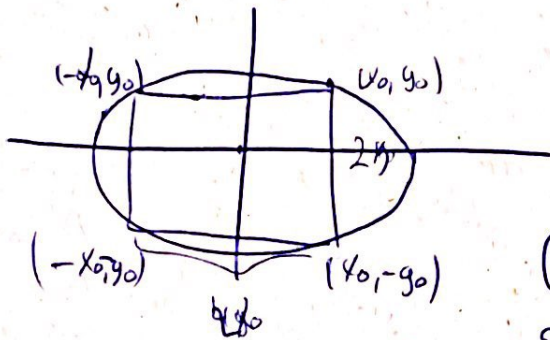
$a > f - A$
 $\frac{f - A}{a} < 1$

directrices

$$A \pm \frac{a}{e} \quad (!)$$

$$A \pm \frac{a}{\frac{f - A}{a}} = A \pm \frac{a^2}{f - A} //$$

P21- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Encontrar (x_0, y_0)



$$A(x_0, y_0) = 4x_0y_0$$

Como es una función siempre positiva

Es equivalente a maximizar su cuadrado

$$A^2(x_0, y_0) = 16x_0^2y_0^2$$

tambien tenemos $x_0, y_0 \in E$.

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_0^2 = \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) b^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_0^2)$$

Em el cuadrado

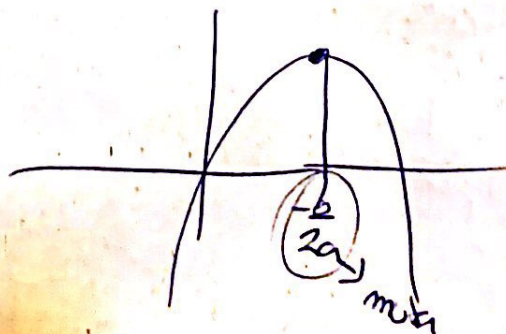
solo ordenar
eliminamos

$$\Rightarrow A^2(x_0) = 16 \cdot x_0^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_0^2)$$

$$= 16b^2 \frac{x_0^2}{a^2} - 16b^2 \frac{x_0^4}{a^2}$$

$$\Rightarrow = 16b^2 \lambda - 16b^2 \frac{\lambda^2}{a^2}$$

$$\lambda = x_0^2$$



$$-\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{16b^2}{2 \cdot 16b^2 \frac{a^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{x_0^2}{2a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

P3/ Determinar dominio

Lo primero y más importante es saber las restricciones,

$$\frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow q(x) \neq 0, \forall x \in \text{Dom}$$

Si tengo combinado $\sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}$ aplico ambas condiciones.

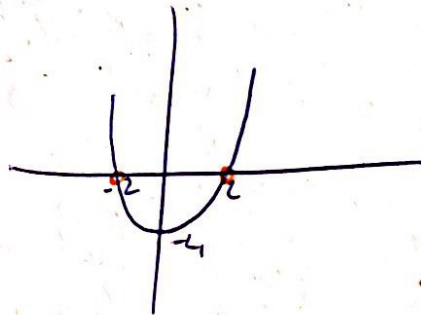
$$\sqrt[2m]{p(x)} \Rightarrow p(x) \geq 0 \forall x \in \text{Dom}$$

$$a) f(x) = \frac{5}{x^2 - 4}$$

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x^2 \neq 4$$

$$|x \neq \pm 2|$$



$$\Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$b) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \wedge x-1 \neq 0$$

$$|x \neq 1|$$

Tabla signos!! $\text{Sol}_2 \subset \mathbb{R} - \{1\}$

	$-\infty$	-1	1	∞
$x+1$	-	+	+	
$x-1$	-	-	+	
	+	-	+	

$$\text{Sol}_1: (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$\text{Sol}_1 \wedge \text{Sol}_2 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$c) f(x) = |x^2| - 2$$

El valor absoluto tiene restricción?

No!



Sol: \mathbb{R} //

$$d) \sqrt{16-x^2} \Rightarrow 16-x^2 \geq 0$$

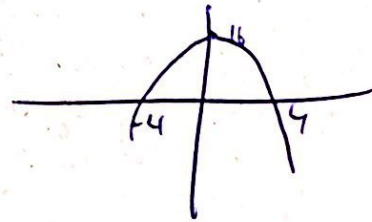
$$16 \geq x^2 \quad \times \text{ no hacer eso}$$

$$\Rightarrow 16-x^2 \geq 0$$

$$(4-x)(4+x) \geq 0$$

	$-\infty$	-4	4	∞
$(4-x)$	+	+	-	
$(4+x)$		-	+	+
		-	+	-

$[-4, 4] : \text{Sol} //$



P41 ~~1~~ Para la paridad

- Par ssi $f(x) = f(-x)$
 - IMPAR ssi $f(x) = -f(x)$
- Ojo los signos.

a) $f(x) = 6x^2 - x - 5$

veamos $f(-x)$

$$6(-x)^2 - (-x) - 5$$

$$6x^2 + x - 5 \neq f(x) \quad \text{No es par}$$

veamos $-f(x)$

$$-(6x^2 - x - 5) =$$

$$= -6x^2 + x + 5 \neq f(x) \quad \text{No es impar}$$

b) $f(x+1) = 6(x+1)^2 - (x+1) - 5$
 $= 6(x^2 + 2x + 1) - (x+1) - 5$

veamos $f'(x) = 6x^2 - 11x$

veamos $f(x) = 6(-x)^2 - 11(-x) = 6x^2 + 11x \neq f(x) \quad \text{No es par}$

veamos

$$-f(x) = -(6x^2 - 11(-x)) = -6x^2 - 11x \neq f(x) \quad \text{No es impar}$$

c) $f(|x|) = 6(|x|)^2 - |x| - 5$

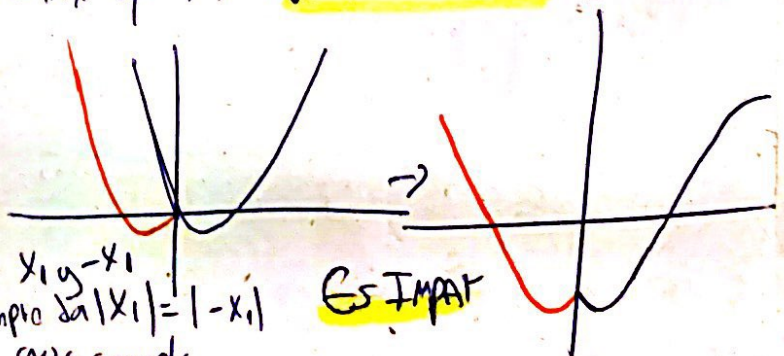
veamos $f(x)$

$$6(|-x|)^2 - |-x| - 5$$

↳ solo este cambia

dado x_1 y $-x_1$
 siempre da $|x_1| = |-x_1|$
 Así que cumple

Es IMPAR



$$f(x) = 6|x|^2 - |x| - 5$$

$$-f(-x) = -6x^2 + |x| + 5 \neq f'(x) \neq \text{No es impar}$$

• Ceros

$$a) 6x^2 - x - 5 = 0$$

$$(6x + 5)(x - 1) = 0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-5)}}{12} = \frac{1 \pm 11}{12}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \frac{-5}{6} \end{array} \right.$
 $Z(f) = \left\{ \frac{-5}{6}, 1 \right\}$

Ahora es ~~Bijectiva~~ f \uparrow $\text{Im} \uparrow$ \wedge $\text{Sob} \uparrow$

\downarrow
tampoco

\downarrow
 $\forall y \in B, \exists x \in \text{Dom} f$
No cumple $f^{-1}(-\infty, -5), \nexists x \in \text{Dom} f$

$$x = \frac{5}{6} \wedge x = 1$$


$$\Rightarrow f\left(\frac{5}{6}\right) = f(1) = 0$$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad \times \text{ No cumple}$$

$$6x^2 - x - 5 = 6y^2 - y - 5$$

Polinomio grado a grado

$$6x^2 - 6y^2 \wedge x = y$$

$$\underline{x = \pm y}$$


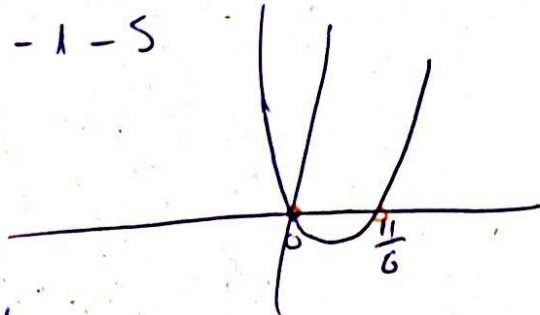
\Rightarrow No Bijectiva
pues no inyectiva
 \wedge no Sob.

b) $f(x+1)$

$f'(x) = 6(x+1)^2 - (x+1) - 5$

$f'(x) = 6x^2 + 12x + 6 - x - 1 - 5$
 $= 6x^2 - 11x = f'(x)$

$x(6x - 11) = 0$



$Z(f) = \{ 0, 11/6 \}$

Biyectiva? No pues no cumple inyectividad

c) $6(|x|)^2 - |x| - 5 = 0$

$6(x^2) - |x| - 5 = 0$

si $x > 0$

$6x^2 - x - 5 = (6x + 5)(x - 1)$

sol $-\frac{5}{6}, 1$
 $\notin \mathbb{R}^+, \hat{=} \text{Dom } \mathbb{R}^+$

si $x < 0$

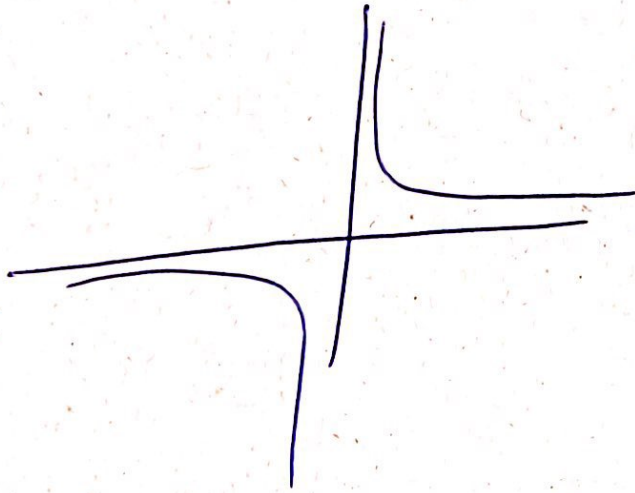
$6x^2 + x - 5 = (6x - 5)(x + 1)$

sol $-1, \frac{5}{6}$
 $\in \mathbb{R}^-, \notin \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow Z(f) = \{-1, 1\}$

No Biyectiva
 por inyectividad y sobre.

$$a) f(x) = \frac{1}{x}$$



Cómo vemos esto.

- $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{(-x)}$ Es Impar.


- Dom: $\mathbb{R} - \{0\}$

- $f(x) = f(y)$

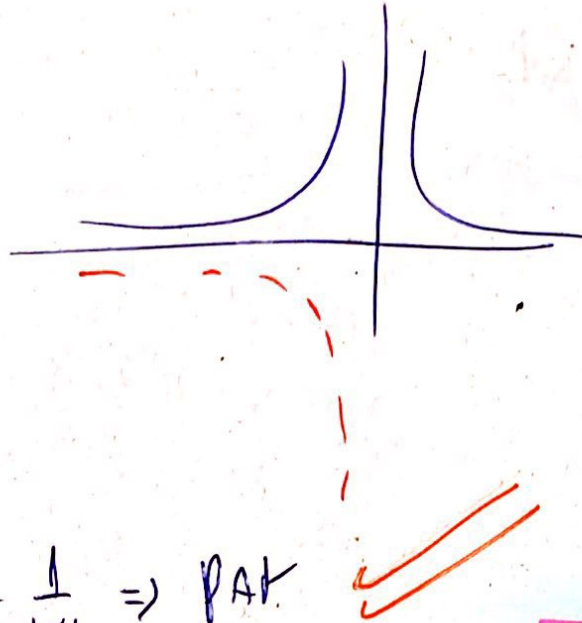
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y \quad \text{Inyectiva} //$$

- Rec: $\mathbb{R} - \{0\} \iff \text{Cod} = \mathbb{R}$ No sobreyectiva

- $Z(f) = \emptyset$

- Asintota. $x=0$ Horizontal \updownarrow All tavó's  casi
 $y=0$ Vertical

b) $f(x) = \frac{1}{|x|}$



• Dom = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asintotas $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

• Paridad

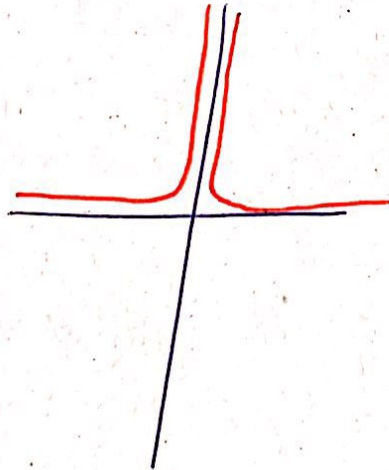
$f(x) = f(-x) \Rightarrow \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} \Rightarrow$ PAR

• No biyectiva, pues no inyectiva

• $Z(f) = \emptyset$

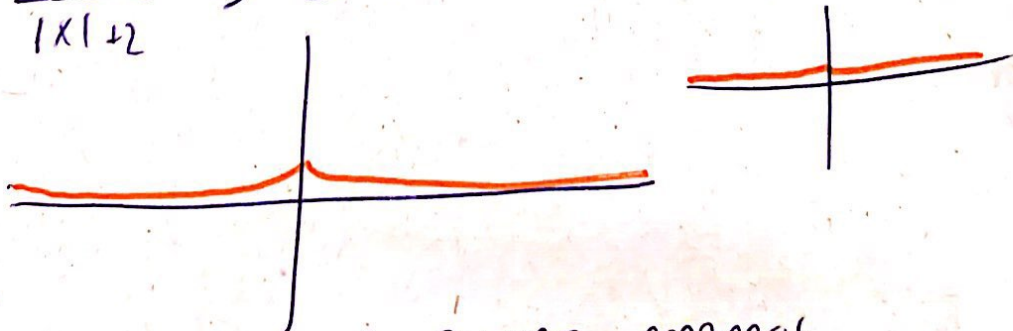
c) $\frac{1}{x^2} = f(x)$

verificar



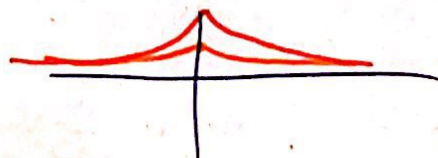
Puede ser útil
 ver cortes
 con los ejes
 cuando hayen.

d) $f(x) = \frac{1}{|x|+2}$ \rightarrow si sumo más al denominador



si sumo menos

¿y si resto? 🐼



PEI

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Dom f

$$x^2 - 1 \neq 0$$
$$x^2 \neq +1$$
$$x \neq \pm 1$$

$\forall x \in \mathbb{R} \text{ comple}$

$\Rightarrow \text{Dom } \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Paridad

$$f(x) = f(x) ?$$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} \neq f(x)$$

\therefore No es par

$$-f(x) = - \left(\frac{-x}{(-x)^2 - 1} \right) = \frac{x}{x^2 + 1} = f(x)$$

\therefore Es par

Ojo: con los signos
Par \wedge IMPAR
 $\exists f, g \in \mathbb{F} \mid f(x) = 0$

• Signos

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

	$-\infty$	-1	0	$+1$	∞
x		-	-	+	+
$x+1$		-	+	+	+
$x-1$		-	-	-	+
		<hr/>			
		-	+	-	+

$$f(x) > 0 \quad \text{si } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$$

$$f(x) < 0 \quad \text{si } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) //$$

• Asíntota

Verticales indeterminaciones.

$$x = -1 \quad \wedge \quad x = 1$$

horizontal es

¿qué ocurre si avanzo hacia los extremos?

$$y = 0 //$$

$$b) f(x_2) \cdot f(x_1) = \frac{(1+x_2 x_1)(x_1 - x_2)}{((x_1)^2 - 1)(x_2^2 - 1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{x_2^2 - 1} - \frac{x_1}{x_1^2 - 1} &= \frac{x_2(x_1^2 - 1) - x_1(x_2^2 - 1)}{((x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1))} \\ &= \frac{x_2 x_1^2 - x_2 - x_1 x_2^2 + x_1}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} \\ &= \frac{(x_1 - x_2) + x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} // \end{aligned}$$

Como f impar basta estudiar \nearrow u \searrow en un intervalo.

Si $x \in (0, 1)$ y $x_1 < x_2$

$$\frac{(x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} = \frac{\ominus \cdot \oplus}{\ominus \ominus} = \ominus = f(x_2) - f(x_1) < 0$$

$\therefore \searrow$ Además $f(x) < 0$

Si $x \in (1, \infty)$ y $x_1 < x_2$

$$\frac{(x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)} = \frac{\ominus \oplus}{\oplus \oplus} = \ominus = f(x_2) - f(x_1)$$

$\therefore \searrow$ Además $f(x) > 0$

Como es impar análogo

si $x \in (-1, 0)$ \downarrow pero ahora $f(x) > 0$

si $x \in (-\infty, -1)$ \downarrow pero ahora $f(x) < 0$

c) $f(1, \infty)$

$l(x): (1, \infty) \rightarrow f(1, \infty)$
 $x \rightarrow l(x) : f(x)$

Es sobreyectiva por definición

Wc y o $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow x = y$ ssi inyectiva |

$$\frac{(x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x - y)(1 + xy)}{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} = 0$$

ssi $1 + xy = 0 \vee x - y = 0$
 $x = -\frac{1}{y}$
 $x = y$

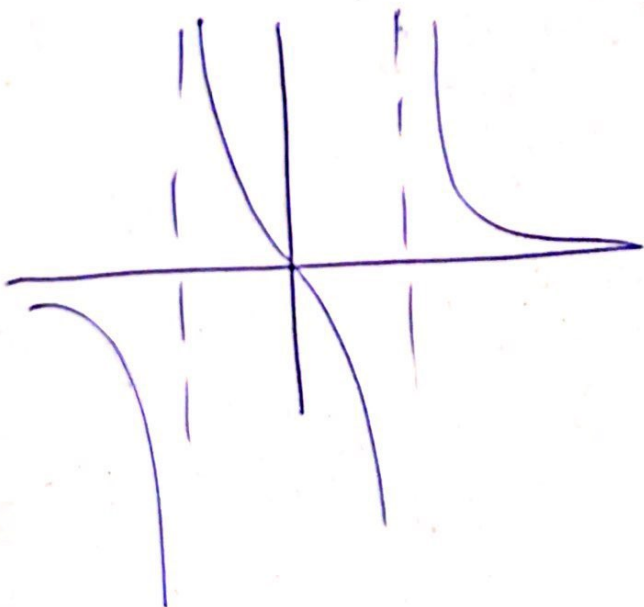
~~Dom~~ $\Rightarrow \underline{x = y}$ \uparrow

duogo su imudsa

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$yx^2 - y - x = 0$$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1^2 + 4yy}}{2y} \quad \text{cambia variables}$$



Terminamos !

Walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl