P3) Completitud de funciones.

Sea $f(x) = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

a) Dominio

$|x|-1 \neq 0$

Si $x>0$: $x-1 \neq 0$, $\boxed{x \neq 1}$ | Si $x<0$: $-x-1 \neq 0$, $\boxed{-1 \neq x}$

Ceros

$Z(f): \{ \forall x \in Dom(f) : f(x) = 0 \}$

$f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{|x|+1}{|x|-1} = 0 \iff |x|+1 = 0$

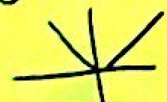
$|x| = -1$

No tiene sol

$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

$\Rightarrow Z(f) = \phi.$

Sea $f(x) = |x|$



se tlaga el signo y $|x| = |-x|$

Paridad

$f(x) = f(-x)$ Par #

$f(-x) = \dfrac{|-x|+1}{|-x|-1} = \dfrac{|x|+1}{|x|-1} = f(x)$ $\therefore$ Es Par

$f(x) = -f(-x)$ Impar

$$-f(x) = -\left(\frac{|-x|+1}{|-x|-1}\right)$$

$$= -\left|\frac{|x|+1}{(|x|-1)}\right| \neq f(x)$$

$\therefore$ No es Impar

Periodiadad: Esta función no posee periodiadad, pues no cumple

$$f(x+\lambda) = f(x) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Como la función es par podemos estudiar solo un intervalo, en este caso $\mathbb{R}^+$,

Si $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \frac{|x|+1}{|x|-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Luego $f(x_2) - f(x_1)$, Sea $x_1 < x_2$

$$\frac{x_2+1}{x_2-1} - \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{(x_2+1)(x_1-1)-(x_1+1)(x_2-1)}{(x_2-1)(x_1-1)} = \frac{x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1 - x_1x_2 + 1 - x_2 + x_1}{(x_2-1)(x_1-1)}$$

$$= \frac{2(x_1-x_2)}{(x_2-1)(x_1-1)}$$

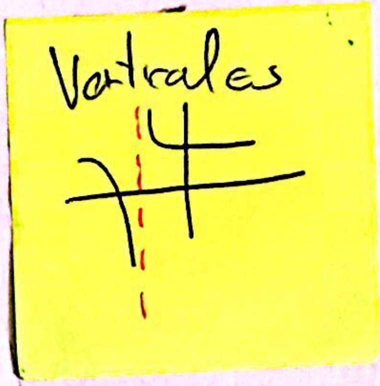
Si $x \in (0,1)$ Los signos de $f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(\ominus)}{(\ominus)(\ominus)} = \frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$

$\searrow$ decreciente

Si $x \in (1, \infty)$ $\quad f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(\ominus)}{\oplus\oplus} = \frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$

$\searrow$ decreciente.

Analizaremos los asintotas para tener completado en el grafico



- verticales

Son las indeterminaciones

$X = -1, \; X = 1$

horizontales

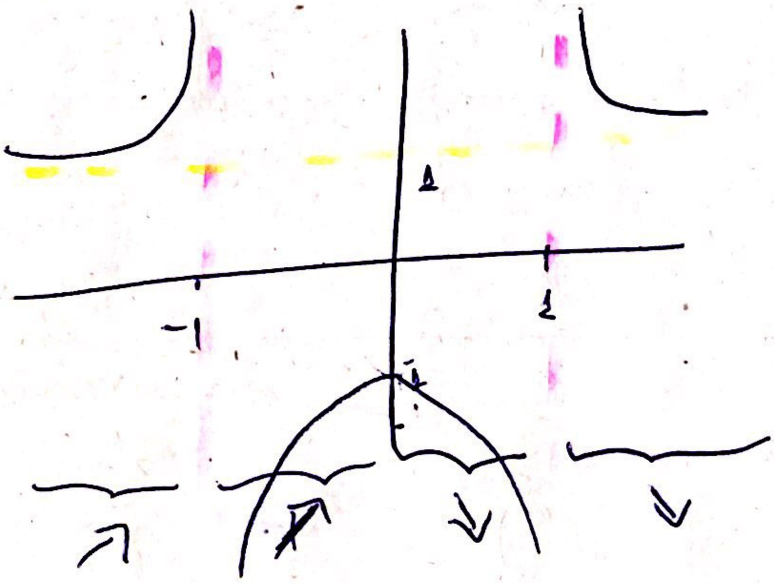
Escoando las variables se val al $\pm \infty$

$$\frac{x+1}{x-1} \begin{matrix} \to \text{grado } 1 \\ \to \text{grado } 1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x \to \infty$$

$$\frac{1+0}{1-0} = 1$$

$\underline{y=1}$ | Asintota. Luego es análogo para $-\infty$, pues es impar.

Con toda la información que tenemos vamos a graficar.



$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$yx - y = x + 1$$

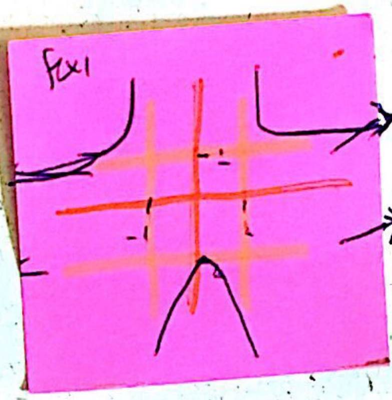
$$yx - x = 1 + y$$

$$x(y-1) = 1+y$$

$$x = \frac{1+y}{-y+1}$$

$\rightarrow$ $y \neq 1$

Su rec(f) $\mathbb{R} - \{1\}$ //



Asimtota

no asintota.

Si $x < 0$ $\quad y = \frac{-x+1}{-x-1}$

$$-yx - y = -x + 1$$

$$x(1-y) = 1+y$$

$$x = \frac{1+y}{1-y}$$

Bastaba estudiar 1 como par

P4) $a, b \in \mathbb{R}$ $f_{a,b}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_{a,b}(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) PDQ: $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{(a,b)}$.

$f_{1,b}(x) = x + b$ Calculemos

$f_{a,0}(x) = ax + 0 = ax$

luego me piden componer $f_{1,b}(f_{a,0}(x))$

$$(ax) + b = f_{1,b}(f_{a,0}(x)) = f_{a,b} \ \square$$

b) Si $a \neq 0$. PDQ $f_{a,b}$ biyectiva y $f^{-1}_{a,b}$

$f(x) = f(y)$

$\cancel{a}x + \cancel{b} = \cancel{a}y + \cancel{b}$

$x = y$ $\therefore$ Inyectiva

$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

luego $y = ax + b$

$\frac{y}{a} - \frac{b}{a} = x$ no se indeterminate

$Rec = \mathbb{R} = Cod$

$\therefore$ sobre.

Como es biyectiva puedo sacar inversa

$y = ax + b$

$\frac{y}{a} - \frac{b}{a} = x \to \frac{x}{a} - \frac{b}{a} = y = f^{-1}(x) \,\|$

c) Si $a \neq 0$, determine $p, q \in \mathbb{R}$

$$f_{ab} \circ f_{pq} = f_{ba}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{ab} = ax+b \\ f_{pq} = px+b \end{array}\right\} f_{ab}(f_{pq}(x)) = a(px+q)+b = f_{ba} = bx+a$$

$$f_{ba} = bx+a$$

$$= apx + aq + b = bx + a$$

$$\Rightarrow ap = b \wedge aq + b = a \Leftrightarrow$$

$$\boxed{p = \frac{b}{a} \wedge q = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}} //$$

Álgebra Lineal Otoño 2019. Ejercicio 2

Profesores: Daniel Remenik, N. Astromujoff y Alexander Frank Nombre:

P. Auxiliares: F. Muñoz, N. Zalduendo y K. Pinochet Sección:

1. Sea $V = \mathbb{R}^{2,2}$

Sean $S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 17/5 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, y sea $W = \{A \in V / a_{11} + a_{22} = 0\}$

a) Demuestre que S es subespacio propio de V, es decir, que no es todo el espacio.

b) Demuestre que $W = S$

Terminamos !

cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl