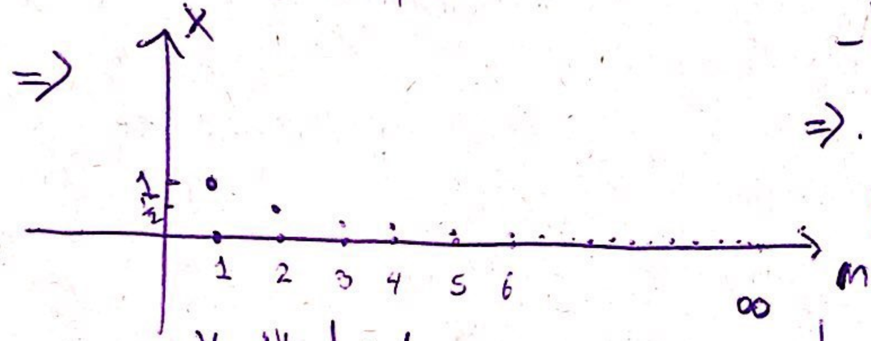
P1) $F = \{ x \,/\, x = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N} \}$

Veamos un esquema de como se comporta el conjunto F.

claramente $m \neq 0$

$\Rightarrow$



- $\forall m \in \mathbb{N}$, $m>0$ se tiene $1>0$ $\Rightarrow$ que $\frac{1}{m} > 0$, $\forall m$, luego el 0 es cota inferior.

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{m} \leq 1$

- Si $m = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1} = 1$ ; $1 \in F$, Además 1 entonces es 1 es máx F, luego 1 sup(A) y sus cotas sup $[1, \infty^+)$.

- $0 \overset{?}{\in} F$
$0 \neq \frac{1}{m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow 0$ no es mínimo.

- El conjunto de cotas inf $(-\infty, 0]$

o Para probar que es ínfimo debemos probar que todos los números superiores a 0 no son cota inferior.

PDQ: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{m} < 0 + \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 1 < \varepsilon \cdot m$$ luego por propiedad

arquimediana $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N} \mid \varepsilon \cdot m_0 > 1$ con lo cual demostramos que se cumple para $m = m_0$.

$F \neq \emptyset \wedge$ Acotado inf. $\inf(F) = 0$

$\exists s$, $s = \inf(F)$

Scanned with CamScanner

**P2)** $A = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x\cdot(x^2-2) \leq 0\}$

- Tenemos una desigualdad, donde los elementos de A son racionales de dicha.

tenemos incluido el conjunto solución de

$x(x^2-2) \leq 0$

$\Leftrightarrow x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leq 0$, con puntos críticos

$-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$.

Recordemos suma por su diferencia

Veamos tabla de signos

| | $-\infty$ a $-\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ a $0$ | $0$ a $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ a $\infty+$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x+\sqrt{2}$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-\sqrt{2}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

$\Rightarrow A = \{(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [0, \sqrt{2}]\} \cap \mathbb{Q}$

A no es acotado inferiormente, como sabemos $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$, no lo es. (Siempre entre 2 elementos tengo otro, lo que extrapola que siempre habrá otro menor)

Entonces A no posee mínimo $\wedge$ no posee ínfimo.

Scanned with CamScanner

Es acotado superiormente por $[\sqrt{2}, \infty)$, $A \neq \phi \wedge A$ acotado sup

. Entonces $\sup(A) = \sqrt{2}$, no tiene máx pues $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow \sqrt{2} \notin A$ //

P3) $A \subseteq B \Rightarrow \inf(B) \le \inf(A) \le \sup(A) \le \sup(B)$

En efecto estas cantidades están bien definidas por axioma del supremo y propiedad del ínfimo.

(A, B no vacío y acotados)

Sea $a \in A \Rightarrow a \le \sup(A) \wedge a \ge \inf(A)$

Por transitividad de la desigualdad $\inf(A) \le \sup(A)$

- Quiero ver ahora que ~~[illegible]~~ $\sup(A) \le \sup(B)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \sup(A) - \varepsilon < a$

Primero quiero probar $\sup(A) \le \sup(B)$

! ! ! $\Leftrightarrow \sup(A) - \sup(B) \le 0$

Por contradicción supongamos $\sup(A) - \sup(B) > 0$

Luego por se tiene $\forall \varepsilon > 0$, en particular

$\sup(A) - \sup(B) = \varepsilon$

$\Rightarrow \exists a \in A \quad \sup(A) - (\sup(A) - \sup(B)) < a$

$\sup(B) < a$

$\sup(B) < a$, para $a \in A \subseteq B \Rightarrow a \in B$.

Entonces tenemos un elemento superior al supremo  No!!!

Porque $\forall x \in X$, $X \neq \emptyset$ y acotado

$$\inf(X) \le x \le \sup(X)$$

$\therefore \quad \sup(A) - \sup(B) \le 0$

$\sup(A) \le \sup(B)$ //

Para el caso $\boxed{\inf(B) \le \inf(A)}$ es análogo

Veamos [redacted] $\inf(B) - \inf(A) \le 0$

Por contradicción supongamos $\inf(B) - \inf(A) > 0$

Por propiedad tenemos $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \inf(A) + \varepsilon > a}$

En particular $\varepsilon = \inf(B) - \inf(A)$

$\Rightarrow \exists a \in A; \inf(A) + (\inf(B) - \inf(A)) > a$

$\inf(B) > a$, $a \in A \subseteq B \Rightarrow a \in B$

$\therefore \quad \inf(B) - \inf(A) \le 0$

$\Leftrightarrow \inf(B) \le \inf(A)$ $\boxtimes$

Scanned with CamScanner

$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$

P4 | A $\subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado (superior e inferiormente)

tenemos $\exists \sup(A)$, $\exists \inf(A)$ por axioma supremo

Veamos que el conjunto imagen de $f(A)$ posee ínfimo y sup.

• Debemos probar que es **NO VACÍO** y **ACOTADO**

1) Como $A \neq \phi$ y $f$ está definida en todo $\mathbb{R}$; si $a \in A$,
$\exists f(a)$ $\therefore$ $f(A) \neq \phi$

$f(A) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A, f(x) = y\}$ || Imagen

2) $\exists \sup(A)$ e ínfimo de $A$ $\neq 0$ $\wedge$ acotado
$\Rightarrow \forall x \in A \quad \inf(A) \leq x \leq \sup(A)$

# Si son números reales puedo usar $f$
# Si $f$ es decreciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$
$f(x_2) - f(x_1) \leq 0$

$\inf f(A) \leq x \quad \wedge \quad x \leq \sup(A)$
$f(x) \leq f(\inf(A)) \wedge f(\sup(A)) \leq f(x)$

$\Leftrightarrow \boxed{f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A))}$ $\Rightarrow f(A)$ está acotado
$\Rightarrow \exists \sup(f(A)), \exists \inf(f(A))$

• Además se tiene el conjunto $f(A)$ cumple
$\forall y \in f(A) \quad \inf(f(A)) \leq y \leq \sup(f(A)) \Rightarrow \inf(f(A)) \leq \sup(f(A))$ 1

Scanned with CamScanner

tenemos que

$\forall x \in A$, $f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A))$

$\forall y \in f(A))$ $f(\sup(A) \leq y \leq f(\inf)(A))$

$\downarrow$ cota infe

$\downarrow$ Cota superior

y como $\sup(f(A)$ es la menor de las cotas superiores $\Rightarrow \sup(f(A)) \leq f(\inf(A)))$ (2)

y como $\inf(f(A)$ es la mayor de cotas inferiores

$$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)$$ (3)

(1), (2) $\wedge$ (3)

$f(\sup(A) \leq \inf(f(A)) \leq \sup(f(A) \leq f(\inf(A))$ ▨

ver lentamente.

Scanned with CamScanner

Terminamos !

cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl

Scanned with CamScanner