



MA1001-3 Introducción al Cálculo

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón.

Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

## Ejercicio TPC 3

09 de Mayo de 2019

- (P1) Demuestre que si  $A$  y  $B$  son acotados superiormente y no vacíos entonces también lo son  $A \cup B$  y  $A \cap B$ .
- (P2) Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  tal que posee elemento máximo  $M \in A$ , demuestre utilizando la caracterización del supremo que  $M = \sup(A)$ .
- (P3) Analice existencia y calcule supremo de los siguientes conjuntos, justifique su cálculo con una demostración formal.

(I)  $(a, b)$

(II)  $\{(-1)^n - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

(III)  $\{-\frac{1}{f(n)} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ,  $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , estrictamente creciente.

(P4) Sea  $A = \left\{ \frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ . Demuestre que  $\inf(A) = 1$ .

(P5) Muestre que  $\sup(\sqrt{A}) = \sqrt{\sup(A)}$ , donde  $A \subseteq \mathbb{R}_+$ , es no vacío y acotado superiormente. Considere  $\sqrt{A} = \{\sqrt{x} : x \in A\}$ .

**Bonus pa' la casa:** Generalice este resultado para toda función  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , biyectiva y creciente estricta: es decir, pruebe que  $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$ .

*Hint pa'l bonus: probar que  $f^{-1}$  es creciente.*

(P6) Sean  $S$  y  $T$  subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$  tales que:

$$(\forall x \in S)(\forall y \in T) x \leq y$$

Probar que  $S$  tiene supremo, que  $t$  tiene ínfimo y que  $\sup(S) \leq \inf(T)$ .

**Bonus pa' la casa:** Suponga ahora que  $S \cup T = \mathbb{R}$ , pruebe que  $\sup(S) = \inf(T)$ .

### 1. Consideraciones.

Tienen  $\infty$  horas para poder hacer los ejercicios.

Recuerden trabajar a conciencia. Éxito!!!