Introducción al Cálculo 2019-1

Tutoría Movilizada

15 de mayo de 2019

P1. Considere la función definida por $f(x) = \frac{2x}{1-|x|}$

a) Determine el dominio, ceros y paridad de f

b) Determine asíntotas verticales y horizontales f

c) Demuestre que $\forall y > 0$ existe $x \in (0,1)$ tal que $y = f(x)$. Use este resultado para deducir que f restringida al intervalo $(-1,1)$ es epiyectiva en $\mathbb{R}$

P2. Considere los puntos $A(a,0)$ y $B(-a,0)$, donde $a > 0$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tal que las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} satisfacen la siguiente relación:

$$m_{PA} = \frac{2m_{PB}}{1 - m_{PB}^2}$$

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

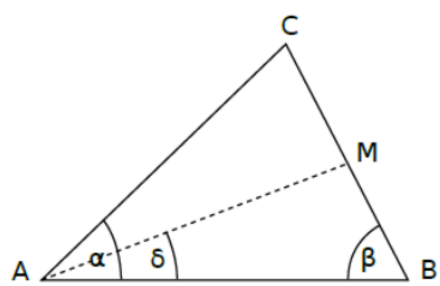
a) $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1 - \frac{\sin(2x)}{2}$

b) $\tan(x)\operatorname{sen}(4x) = 4(1 - 2\operatorname{sen}^2(x))$

c) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = \frac{3}{2}$

P4. En el triángulo ABC de la figura, M es el punto medio del lado $\overline{\text{BC}}$. Demuestre que:

$$\cot(\delta) = 2\cot(\alpha) + \cot(\beta)$$



P5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, y $\lambda > 0$. Si definimos el conjunto $\lambda A = \{x \in \mathbb{R} | x = \lambda \cdot a, a \in A\}$, pruebe que $\sup(A)$ y $\sup(\lambda A)$ existen y que cumplen

$$\sup(\lambda A) = \lambda \cdot \sup(A)$$

P6. Considera la función definida por $f(x) = \text{máx}\{|x|, \sqrt{|x|}\}$.

a) Determine $Dom(f)$, paridad, $Im(f)$, crecimientos. Bosqueje su gráfico.

b) Encuentre el mayor conjunto $A \subseteq Dom(f)$ tal que la restricción $f|_A : A \to f(A)$ sea biyectiva y determine su inversa.

P7. Considere la parábola de ecuación $y^2 = 4px$ y $P = (x_0, y_0)$ un punto de ella. La recta perpendicular a OP por P corta al eje OX en B y la proyección del punto P sobre el eje OX es A.

Demuestre que el trazo $\overline{\text{AB}}$ tiene longitud constante.

NOTAS: PAUTA TUTORÍA MOVILIZADA FECHA / / /

introducción al cálculo

P1| a) Para el dominio de f; tenemos que esta está definida siempre, a excepción cuando $|x| = 1$

$$|x| = 1 \iff x = 1 \lor x = -1$$

$\therefore$ $Dom\ f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

f tiene un solo punto donde se anula y en en $x = 0$.

$\therefore$ ceros $= \{0\}$

Veamos la paridad:

$$f(-x) = \frac{2(-x)}{1 - |-x|} = \frac{-2x}{\underbrace{1 - |x|}_{|-x| = |x|}} = -f(x) \quad \therefore f \text{ es } \underline{\text{IMPAR}}$$

b) Primero encontremos las asíntotas verticales:

Ocurren cuando se anula el denominador pero no el numerador:

El numerador se anula en 0 mientras que el denominador en 1 y -1, luego no comparten ceros

$\therefore$ Asíntotas verticales: $x = -1 \land x = 1$

Ahora las horizontales:

Notemos que tenemos una división de polinomios del mismo grado, entonces las A.H. estarán dadas por $y = \alpha$ con α = cuociente de los coeficientes que acompañan a la MAYOR potencia de x.

Entonces pongámonos en 2 casos para "sacar" el módulo : $x>0$ y $x<0$

$\underline{x>0|}$ f queda $\dfrac{2x}{1-x}$; aquí los coeficientes son 2 y -1

$\Rightarrow y=-2$ es asíntota horizontal de f.

$\underline{x<0|}$ f queda $\dfrac{2x}{1+x}$; los coeficientes son 2 y 1

$\Rightarrow y=2$ es asíntota horizontal de f.

c) Sea $y>0$; hay que encontrar $x\in(0,1)$ tq $f(x)=y$

En general, para probar existencia es más rápido encontrar el elemento "a la mala" y después chantarlo como si se nos hubiera ocurrido divinamente °◡°
Entonces busquemos el x

$$y=\frac{2x}{1-x}\Big\}\text{ pues } x\in(0,1)$$

$\Leftrightarrow y(1-x)=2x \quad \Leftrightarrow \quad y-xy=2x \quad \Leftrightarrow \quad y=2x+xy$

$\Leftrightarrow y=x(2+y) \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{y}{2+y}$ Donde este x siempre existe (pues $y>0$) y además vive entre 0 y 1 (pues $y<2+y$).
Así, encontramos un $x\in(0,1)$ $\forall y>0$ °◡°

OBS: Lo de encontrar el x no lo hagan en la hoja que entregarán ; pueden bajarles puntaje °n°

Para concluir que f en $(-1,1)$ es epiyectiva en $\mathbb{R}$ se puede hacer de 2 formas:

Encontrar $\forall y<0$ $x\in(-1,0)$ tq $f(x)=y$, o argumentar por imparidad

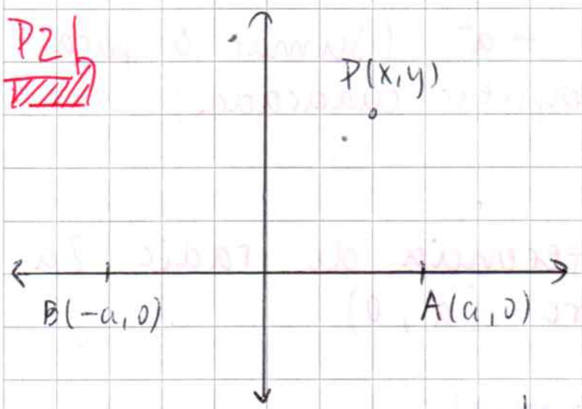
NOTAS: FECHA / / /

Ambas formas son correctas °v°

El argumento por imparidad es más directo; como f impar, se refleja en torno al eje OX y entonces es directo que $\forall y < 0$ $\exists x \in (-1,0)$ tq $f(x) = y$.

El otro argumento es el mismo que hicimos para encontrar el x, en este caso $x = \dfrac{y}{2-y}$

P2 b)



Calculemos primero las pendientes m_{PA} y m_{PB}

$$m_{PA} = \frac{y}{x-a} \qquad m_{PB} = \frac{y}{x+a}$$

Estas pendientes deben satisfacer lo que entrega el enunciado:

$$m_{PA} = \frac{2m_{PB}}{1-(m_{PB})^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{y}}{x-a} = \frac{2\frac{\cancel{y}}{x+a}}{1-\left(\frac{y}{x+a}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-a} = \frac{\frac{2}{x+a}}{1-\left(\frac{y}{x+a}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-a} = \frac{\frac{2}{\cancel{x+a}}}{\frac{(x+a)^2-y^2}{(x+a)^{\cancel{2}}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-a} = \frac{2(x+a)}{(x+a)^2-y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x+a)^2 - y^2 = 2(x+a)(x-a)$$

NOTAS: FECHA / / /

$\Leftrightarrow \quad (x+a)^2 - y^2 = 2(x^2 - a^2)$

$\Leftrightarrow \quad (x+a)^2 - y^2 = 2x^2 - 2a^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2ax + a^2 - y^2 = 2x^2 - 2a^2$

$\Leftrightarrow \quad 2ax + 3a^2 - y^2 = x^2$

$\Leftrightarrow \quad 3a^2 - y^2 = x^2 - 2ax \quad / + a^2 - a^2$ (Sumar 0 para completar cuadrados)

$\Leftrightarrow \quad 3a^2 - y^2 = (x^2 - 2ax + a^2) - a^2$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 = (x-a)^2 + y^2 \quad \}$ Circunferencia de radio $2a$ y centro $(a, 0)$

P3 b

a) $\cos^3(x) + \operatorname{sen}^3(x) = 1 - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$

Usaremos 2 cosas:
- $(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$

Entonces queda:

$$(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))\,(\underbrace{\cos^2(x) - \cos(x)\operatorname{sen}(x) + \sin^2(x)}_{=1}) = 1 - \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow (\cos(x) + \operatorname{sen}(x))\,(1 - \cancel{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}) = 1 - \cancel{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$$

Donde puedo cancelar sin miedo porque $\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)$ NUNCA va a valer 1 ¿Por qué?

Si existiera x^* tal que $\cos(x^*)\operatorname{sen}(x^*) = 1$ entonces también cumple $2\cos(x^*)\operatorname{sen}(x^*) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x^*) = 2$

Y eso NUNCA pasa ($\operatorname{sen}(x) \leq 1 \ \forall x$!)

Entonces no hay nada malo en simplificar :)

NOTAS: FECHA / / /

Y queda: $\cos(x) + \text{sen}(x) = 1$

Elevando al cuadrado a ambos lados:

$$\cancel{\cos^2(x)} + 2\cos(x)\,\text{sen}(x) + \cancel{\text{sen}^2(x)} = \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(x)\,\text{sen}(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{sen}(2x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + (-1)^k \arcsin(0)$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $$\tan(x)\,\text{sen}(4x) = 4(1 - 2\,\text{sen}^2(x))$$

Aquí usaremos que:
- $\text{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$

$$\Rightarrow \quad \tan(x)\,\text{sen}(4x) = 4\left(1 - \cancel{2}\cdot\frac{(1-\cos(2x))}{\cancel{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan(x)\cdot 2\,\text{sen}(2x)\cos(2x) = 4\cdot\cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{sen}(x)}{\cancel{\cos(x)}}\cdot \cancel{4}\,\text{sen}(x)\,\cancel{\cos(x)}\cos(2x) = \cancel{4}\cos(2x)$$

⚠ Solo puedo hacerlo si $\cos(x) \neq 0$, o lo que es equivalente: $x \neq \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ } excluir de solución

$$\Leftrightarrow \quad \text{sen}^2(x)\cdot\cos(2x) - \cos(2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(2x)(\text{sen}^2(x) - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(2x)\cdot\cos^2(x) = 0$$

$\Rightarrow \quad \cos(2x) = 0 \;\vee\; \cos(x) = 0$ } pero ya descartamos que esto fuera posible!

NOTAS: FECHA / / /

$\Rightarrow \cos(2x) = 0 \iff 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad ; k \in \mathbb{Z}$

Excluyendo los x tales que $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, pero pueden verificar que eso no pasa nunca! ˚◡˚

c) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^3(3x) = \frac{3}{2}$ → corrección enunciado original (arreglado en archivo)

Usaremos que: • $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

• $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Entonces, con lo primero queda:

$$\frac{1+\cos(2x)}{\cancel{2}} + \frac{1+\cos(4x)}{\cancel{2}} + \frac{1+\cos(6x)}{\cancel{2}} = \frac{3}{\cancel{2}}$$

$\iff \cancel{1} + \cos(2x) + \cancel{1} + \cos(4x) + \cos(6x) + \cancel{1} = \cancel{3}$

$\iff \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x)$

Ahora usando lo segundo: (con $\cos(2x)$ y $\cos(6x)$)

$$2\cos(4x)\cos(2x) + \cos(4x) = 0$$

$\iff \cos(4x)\left[2\cos(2x) + 1\right] = 0 \Rightarrow$ $\cos(4x) = 0$ $\vee$ $2\cos(2x) + 1 = 0$

• $\cos(4x) = 0$

$\Rightarrow 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \iff x = k\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$

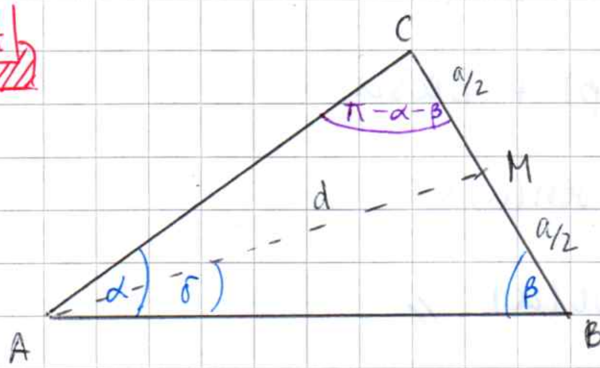
• $2\cos(2x) + 1 = 0$

OBS: Creo que perdí soluciones; la real es $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

P4|



Llamemos "a" a la longitud CB

$\Rightarrow CM = MB = \frac{a}{2}$

Llamemos "d" a AM

Usando Teorema del Seno en ΔABM:

$$\frac{\operatorname{sen}\delta}{a/2} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a/2} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\delta}$$

Aplicándolo denuevo en ΔAMC:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)}{a/2} = \frac{\operatorname{sen}(\pi-\alpha-\beta)}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a/2} = \frac{\operatorname{sen}(\pi-\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)}$$. Y ahora igualando los dos $\frac{d}{a/2}$:

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(\pi-(\alpha+\beta))}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

Usando: • $\operatorname{sen}(\pi-x) = \operatorname{sen}x$
• $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\delta) - \operatorname{sen}(\delta)\cos(\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

8|

NOTAS: FECHA / / /

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\delta) - \operatorname{sen}(\delta)\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\alpha)\cot(\beta) + \cos\alpha = \operatorname{sen}(\alpha)\cot(\delta) - \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\alpha)\cot(\delta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cot(\beta) + 2\cos\alpha$$

Dividiendo a ambos lados por $\operatorname{sen}(\alpha)$:

$$\cot(\delta) = \cot(\beta) + 2\cot(\alpha) \quad //$$

P5| Por enunciado, A es no vacío y acotado superiormente $\Rightarrow$ Por axioma del Supremo $\exists \sup(A)$

Por otro lado, como A es no vacío, entonces $\exists\, a \in A$, y si lo multiplico por λ quedo con un $\lambda a \in \lambda A$ (por definición de λA) $\Rightarrow$ λA es no vacío

Ahora, como $\sup(A)$ existe:

$$a \leq \sup(A) \quad \forall a \in A \quad / \cdot \lambda$$
$$a\lambda \leq \lambda \sup(A) \quad \forall a \in A$$

$\Rightarrow \forall x \in \lambda A : x \leq \lambda \sup(A)$. Luego λA está acotado superiormente. $\therefore$ Por Ax del supremo, $\exists \sup(\lambda A)$.

Y como $\lambda \sup(A)$ es cota superior de λA:

$$\sup(\lambda A) \leq \lambda \sup(A)$$ (Por definición de supremo)

Hay que ver la otra desigualdad

En efecto: $\forall x \in \lambda A : \quad x \leq \sup(\lambda A)$

$\Rightarrow \forall a \in A : \quad \lambda a \leq \sup(\lambda A)$

$\Rightarrow \forall a \in A : \quad a \leq \frac{\sup(\lambda A)}{\lambda}$

torre.

Entonces descubrimos que $\frac{\sup(\lambda A)}{\lambda}$ es cota superior de A

Y por definición de supremo:

$$\sup(A) \leq \frac{\sup(\lambda A)}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda \sup(A) \leq \sup(\lambda A)$$

Como tenemos las dos desigualdades, concluimos:

$$\lambda \sup(A) = \sup(\lambda A) \quad //$$

P6) a) Para el dominio, el módulo nos salva de cualquier indeterminación.

$$\therefore \text{Dom } f = \mathbb{R}.$$

$$f(-x) = \max\{|-x|, \sqrt{|-x|}\} = \max\{|x|, \sqrt{|x|}\} = f(x)$$

$\therefore$ f es <u>PAR</u>

Para el crecimiento; como f es par sólo analizaremos $x > 0 \Rightarrow f(x) = \max\{x, \sqrt{x}\}$ con $x > 0$

Si resuelven la inecuación $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x > x^2$ llegarán a que eso ocurre en $(0,1)$, en $(1,\infty)$ se cumple $x^2 > x$

Entonces

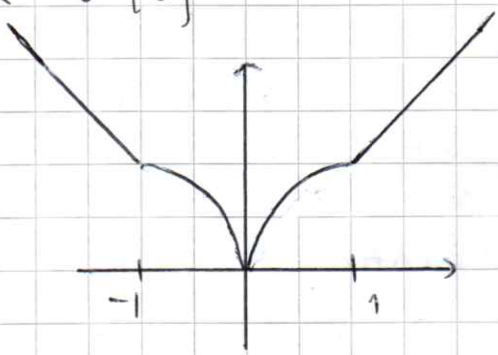
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ x & \text{si } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Donde incluí el 0 y el 1 en $\sqrt{x}$ pues en esos 2 puntos $\sqrt{x} = x$ y es irrelevante a quién le otorgo el máximo.

Como $\sqrt{x}$ y x son crecientes en $[0,\infty)$, f es creciente en $[0,\infty)$ y por paridad, decreciente en $(-\infty, 0]$

NOTAS: FECHA / / /

Además como $|x|$ y $\sqrt{|x|}$ ≥ 0 siempre se tiene que
$\text{Im } f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$



b) Como f par; no es inyectiva en $\mathbb{R}$, así que mis candidatos a A son sólo uno de los dos lados de f: $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ o $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Tomemos $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$f(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ sigue siendo $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Para este intervalo, f es inyectiva y también epiyectiva pues recorre todo $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ $(f(A))$

$\Rightarrow$ f es biyectiva en $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Su inversa será $f^{-1} = \min\{x, x^2\}$

$$\Leftrightarrow \quad f^{-1} = \begin{cases} x^2 & x \in [0, 1] \\ x & x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

f^{-1} resulta de invertir $\sqrt{x}$ en $[0, 1]$ y x en $(1, \infty)$

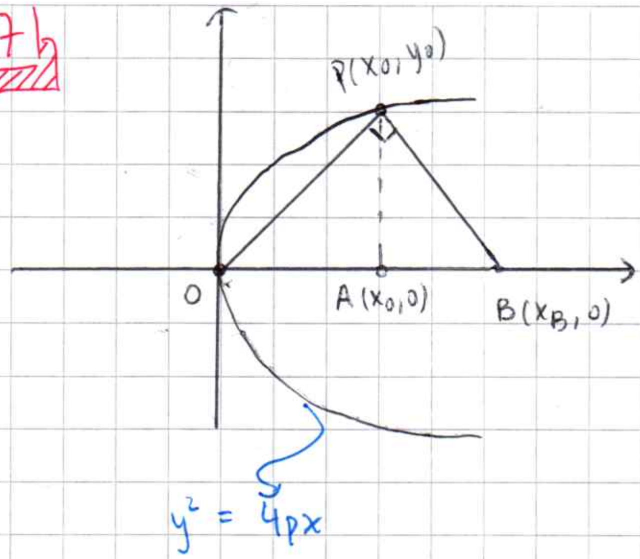
(La inversa de $\sqrt{x}$ es x^2 en ese intervalo, y la de x es ella misma)

Mientras que lo del mínimo viene de que quiero que f valga x^2 en $[0, 1)$ y x en $(1, \infty)$

11)

NOTAS: FECHA / / /

P7 b)



La pendiente de OP es

$$m_{OP} = \frac{y_0}{x_0}$$

Mientras que la de PB

$$m_{PB} = \frac{y_0}{x_0 - x_B} = \frac{-x_0}{y_0}$$

(por perpendicularidad)

Encontremos x_B

$\Rightarrow \quad y_0^2 = -x_0(x_0 - x_B) \iff y_0^2 = x_0 x_B - x_0^2$

$\iff x_0 x_B = y_0^2 + x_0^2 \iff x_B = \frac{y_0^2}{x_0} + x_0$

Por otro lado $x_A = x_0$ (Al ser la proyección)

Entonces: distancia $AB = x_B - x_A$

$= \left(\frac{y_0^2}{x_0} + x_0\right) - x_0 = \frac{y_0^2}{x_0}$

Pero $(x_0, y_0) \in$ Parábola $\Rightarrow y_0^2 = 4p x_0$

$\Rightarrow dAB = \frac{4p x_0}{x_0} = 4p \rightarrow$ constante //