O

MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Control Recuperativo MA1001-2019 TD
20 de Mayo de 2019

P1. ***[Teorema de Stewart]***

a) El teorema de Stewart permite determinar el valor de cualquier ceviana trazada desde uno de los vértices de un triángulo en función de los segmentos determinados por estos.
Demostrar que se cumple la siguiente ecuación:

$$c \cdot (mn + p^2) = a^2 m + b^2 n$$

Indicación:
0)Consideremos un triángulo ABC y un punto Q tal que pertenezca a la recta AB, en este caso CQ es una ceviana. En general se le dice ceviana al segmento que une un vértice con un punto de la recta opuesta a este.
1)Llame Q al punto intersección de la ceviana con la recta AB.
2)Defina un ángulo arbitrario y conveniente, tal que estos se relacionen directamente entre los triángulos formados y pruebe lo pedido.

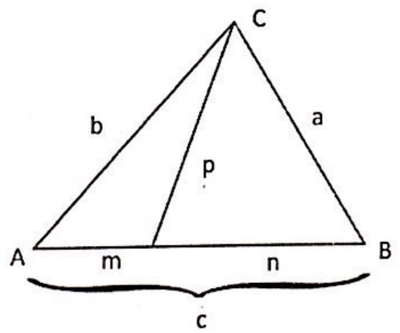


Figura para P1

b) ***[CRMA1001-1-2011-2003][Ecuaciones Trigonométricas]***
Encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica

$$1) \quad cos^2(x) + cos^2(2x) + cos^2(3x) = \frac{3}{2}$$

2) Resuelva para $a \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{2}cos(x) = a$$

Hint: Le puede ser útil usar, sin necesidad de demostración.
$$cos(\beta) + cos(\gamma) = 2cos(\frac{\beta+\gamma}{2})cos(\frac{\beta-\gamma}{2})$$

P2. ***[Geometría analítica/Funciones]***

a) Considere la parábola $y^2 = 4px$ y los puntos $A(0,0)$, $B(2p,0)$, donde $p > 0$. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la parábola, diferente del vértice, y L la recta tangente a la parábola por P Considere que L tiene ecuación $y_0y = 2p(x + x_0)$(No lo demuestre, sólo úselo)

1) Calcule las distancias d_a y d_b desde A y B a la recta L y demuestre que $d_b^2 - d_a^2 = 4p^2$

Indicación: La distancia desde (α, β) a la recta $ax + by + c = 0$ vale $\dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ***[Funciones]***

b) Considere la función definida por $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{2}{1+x}}$

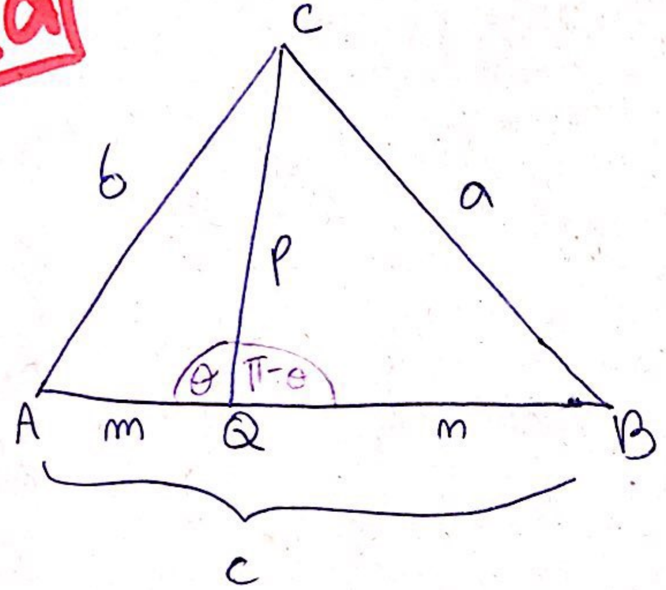
1) Determinar el mayor conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}$ tal que $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{R}$ este bien definido
2) Encuentre $\mathcal{Z}(f)$ y su conjunto solución, además determina los $sgn(f)$
3) Determinar paridad y periodicidad de f
4) Determinar inyectividad y sobreyectividad de f
5) Encuentre intervalos donde f crece y auqellos donde decrece
6) Grafique f y además encuentre intervalo máximo intervalo de biyectividad, calculando posteriormente su inversa.

Mucho éxito y toda la energía de sus Aux para ustedes

P1| Teorema Stewart

Pauta C.R 20 Mayo

P1.a)

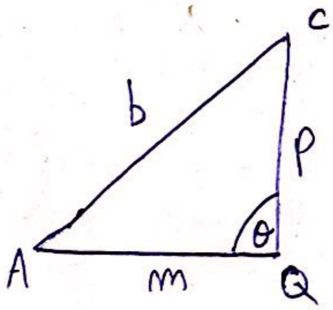


#basta definir ∡ θ y su suplemento (180 − θ) (π − θ)

PDQ

$$c(mn+p^2)=a^2m+b^2n$$

* tomando Δ AQC, luego ocupando Teorema del Coseno

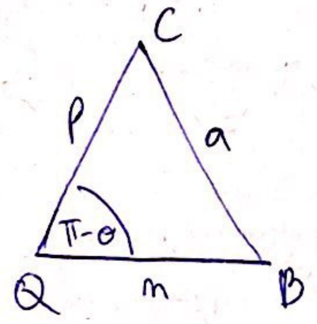


$$\Rightarrow b^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos\theta$$

despejando $\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{m^2+p^2-b^2}{2mp}}$$ (1) Ecuación

* tomando Δ QBC, luego ocupando Teorema del Coseno



$$\Rightarrow a^2 = p^2 + m^2 - 2pm\cos(\pi-\theta)$$

Coseno de la suma

veamos que $\cos(\pi-\theta) = \cos(\pi)\cos(-\theta) - \cancel{\operatorname{sen}(\pi)}\operatorname{sen}(-\theta)$ ($\cos(\pi) = -1$, $\operatorname{sen}(\pi) = 0$)

- ∡ conocidos $= \cos(-\theta)\cdot(-1)$
- paridad de $\cos(x)$ $= \cos(\theta)\cdot(-1)$

despejando $\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a^2 - p^2 - n^2}{2np} \quad (2)$$ Ecuación

Juntando (1) y (2)

$$\frac{m^2 + p^2 - b^2}{\cancel{2}m\cancel{p}} = \frac{a^2 - p^2 - n^2}{\cancel{2}n\cancel{p}}$$

$$m^2 n + p^2 n - b^2 n = a^2 m - p^2 m - n^2 m$$

$$m^2 n + n^2 m + p^2 n + p^2 m = a^2 m + b^2 n$$ → Es la parte derecha que quería formar.

$$mn(m+n) + p^2(m+n) = a^2 m + b^2 n$$

$$(m+n)(mn + p^2) = a^2 m + b^2 n$$

$$c(mn + p^2) = a^2 m + b^2 n. \quad \boxed{/\!/}$$

Scanned with CamScanner

b) Encuentre todas las soluciones
b.1 de la ecuación trigonométrica

1) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = \frac{3}{2}$ } PiPe

Primero veamos los Hint.

1) $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

2) $\cos(\beta) + \cos(\gamma) = 2\cos\left(\frac{\gamma+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$

Usando 1) en PiPe

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1+\cos(2x)}{2} + \frac{1+\cos(4x)}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow \cancel{3} + \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) = \cancel{3}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\cos(2x)}_{\Delta} + \cos(4x) + \underbrace{\cos(6x)}_{\delta} = 0$

Usando 2 em y δ

$$\cos(4x) + 2\cos\left(\frac{2x+6x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-6x}{2}\right) = 0$$

$$\cos(4x) + 2\cos(4x)\cos(-2x) = 0$$ / Paridad $\cos(x)$

$$\underbrace{\cos(4x)}_{1}\underbrace{\left[1 + 2\cos(2x)\right]}_{2} = 0$$

$\Rightarrow \cos(4x) = 0 \; ; \; \alpha = 4x$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 2k_1\pi \pm \arccos(0) \quad , k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = 2k_1\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad , k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = 4x = 2k_1\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad , k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k_1\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8} \quad , k_1 \in \mathbb{Z}$$

1ra solución

Scanned with CamScanner

Luego $1 + 2\cos(2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \quad , \alpha' = 2x$$

$$\Rightarrow \alpha' = 2k_2\pi \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \quad , k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha' = 2k_2\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad , k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha' = 2x = 2k_2\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad , k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = k_2\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad , k_2 \in \mathbb{Z}$$

2da solución.

1 $\cup$ 2 = Solución total.

b2 Resuelva para $a \in \mathbb{Z}$

b.2 $\sqrt{2}\cos(x) = a \Rightarrow \cos(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Sabemos $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \leq 1$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

Luego los únicos enteros entre estas cotas son $\{-1, 0, 1\}$, habrá que ver por casos.

a b c

a) $a = -1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2k\pi \pm \arccos\left(\tfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) &&, k \in \mathbb{Z} \\ &= 2k\pi \pm \tfrac{3\pi}{4} &&, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \text{solución } (1)$$

b) $a = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0$

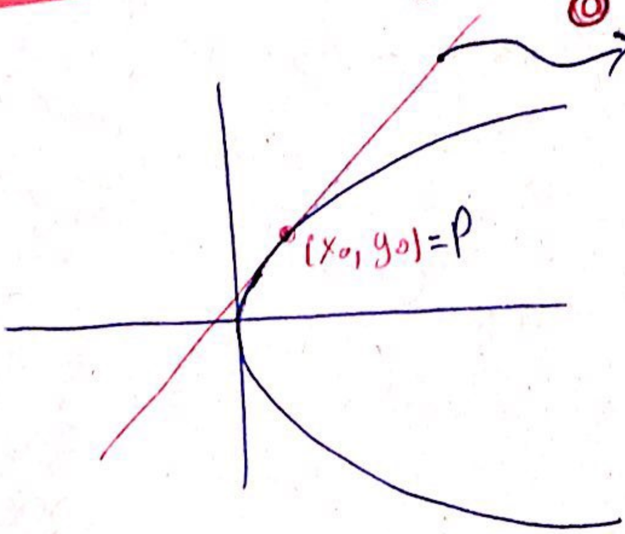
$$\left.\begin{aligned} x &= 2\bar{k}\pi \pm \arccos(0) &&, \bar{k} \in \mathbb{Z} \\ &= 2\bar{k}\pi \pm \tfrac{\pi}{2} &&, \bar{k} \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \text{solución } (2)$$

c) $a = 1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\bar{\bar{k}}\pi \pm \arccos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) &&, \bar{\bar{k}} \in \mathbb{Z} \\ &= 2\bar{\bar{k}}\pi \pm \pi/4 &&, \bar{\bar{k}} \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \text{solución } (3)$$

Uniendo soluciones se tiene.

P2.a) Sea $\underbrace{y^2 = 4px}_{①}$, $A(0,0)$, $B(2p,0)$



su ecuación es $y_0 y = 2p(x + x_0)$

Indicación: sea (α, β) la distancia a la recta $L': ax + by + c = 0$

$$d(P, L') = \frac{|a\alpha + \beta b + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

PDQ $d_b^2 - d_a^2 = 4p^2$.

Calculemos $(d_a)^2$

sea $(\alpha, \beta) = (0,0)$ el punto A y la recta tangente a la parábola

$$\underbrace{y_0 y}_{b} \underbrace{- 2px}_{a} \underbrace{- 2p x_0}_{c} = 0$$

entonces $d(A, L) = \dfrac{|0 \cdot -2p + 0 \cdot y_0 + -2p x_0|}{\sqrt{(-2p)^2 + y_0^2}}$

$$d(A, L) = |-2px_0| / \sqrt{4p^2 + y_0^2}$$

Al elevar al cuadrado.

$$\Rightarrow d_a^2 = \boxed{\frac{4p^2 x_0^2}{4p^2 + y_0^2}}$$

Calculemos $(db)^2$

Sea $(\alpha, \beta) = (2p, 0)$ $\in$ al punto B y la recta tangente a la Parábola

Los coeficientes de a, b, c se mantienen.

entonces $d(B,L) = \dfrac{|2p \cdot -2p + 0 \cdot y_0 + (-2px_0)|}{\sqrt{(-2p)^2 + y_0^2}}$

$$d(B,L) = \frac{|-4p^2 - 2px_0|}{\sqrt{4p^2 + y_0^2}} = \frac{2p|2p + x_0|}{\sqrt{4p^2 + y_0^2}}$$

Al elevar al cuadrado.

$$db^2 = \frac{4p^2(4p^2 + \overbrace{4px_0}^{@} + x_0^2)}{4p^2 + y_0^2}$$

@ $x_0, y_0 \in$ Parábola $\Rightarrow y_0^2 = 4px_0$

$$\Rightarrow db^2 = \frac{4p^2(4p^2 + y_0^2 + x_0^2)}{4p^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow db^2 - da^2 = \frac{4p^2(4p^2 + y_0^2 + \cancel{x_0^2} - \cancel{x_0^2})}{(4p^2 + y_0^2)} = 4p^2 \frac{\cancel{(4p^2 + y_0^2)}}{\cancel{(4p^2 + y_0^2)}}$$

$$= 4p^2 \quad \boxtimes$$

P2.b) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}}$

1) Para dominio 2 condiciones

1) $1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

2) $1 - \frac{2}{1+x} \geq 0$

$\frac{1+x-2}{1+x} \geq 0$

$\frac{x-1}{1+x} \geq 0$:

Lo veremos por tabla :

$x-1$ cambia de signo en 1

$1+x$ cambia de signo en -1

	$-\infty$	-1	1	∞
$x-1$	$-$		$-$	$+$
$1+x$	$-$		$+$	$+$
	$+$		$-$	$+$

Veamos que pasa con los extremos,

$-1 \notin$ Dom por 1)

$\Rightarrow Dom(f(x)) = (-\infty, -1) \cup [1, \infty+)$

Scanned with CamScanner

2) $Z(f)$ y $sgn(f)$

$Z(f) = \{ \forall x \in Dom \, / \, f(x) = 0 \}$

$f(x) = 0$

$\sqrt{1 - \frac{2}{1+x}} = 0 \quad / ()^2$

$1 - \frac{2}{1+x} = 0$

$\frac{1}{1+x} = \frac{-1}{-2} \quad / ()^{-1}$

$1 + x = 2$

$\boxed{x = 1} \Rightarrow Z(f) = \{1\}$

Luego, $\forall \alpha \in Dom\, g(x) \, / \, g(x) = \sqrt{\alpha}$ se sabe que $\sqrt{\alpha} \geq 0$ si $\alpha = 1 - \frac{2}{1+x}$

$\sqrt{1 - \frac{2}{1+x}} \geq 0, \ \forall x \in Dom(f(x))$

Sgn(f)

3) Paridad

Par $\Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = \sqrt{1 - \frac{2}{1+(-x)}} \neq f(x)$$

$\therefore$ No es par.

Impar $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$

$$-f(-x) = -\sqrt{1 - \frac{2}{1-x}} \neq f(x)$$

$\therefore$ No es impar

Periodicidad.

$\forall x \in Dom \,/\, f(x) = f(x+T)$

busquemos T

$$f(x) = f(x+T)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}} = \sqrt{1 - \frac{2}{1+(x+T)}}$$

Puedo elevar al cuadrado? si solo porque raíz ≥ 0.

$$\cancel{1} - \frac{2}{1+x} = \cancel{1} - \frac{2}{1+x+T}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x+T} \quad /()^{-1}$$

$$\cancel{1}+\cancel{x} = \cancel{1}+\cancel{x}+T$$

$$0 = T$$

$\Rightarrow$ No tengo periódo.

4) Inyectividad

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$\sqrt{1-\frac{2}{1+x}} = \sqrt{1-\frac{2}{1+y}} \quad /()^2 \quad \text{dado } \sqrt{\ } \geq 0$$

$$1 - \frac{2}{1+x} = 1 - \frac{2}{1+y}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+y} \Leftrightarrow 1+x = 1+y$$

$$\Leftrightarrow x = y \quad \therefore f(x) \text{ inyectiva}$$

Sobreyectivad

La funcion no es sobreyectiva mediante contraejemplo, pues como $f(x) \geq 0$ no genera elementos negativos.

$$f(x) : (-\infty, -1) \cup [1, \infty+) \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$R_{f(x)} \neq \mathbb{R}.$$

5) Sea $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1)$$

$$\left(\sqrt{1 - \frac{2}{1+x_2}} - \sqrt{1 - \frac{2}{1+x_1}}\right) \cdot 1$$

$$= \frac{\left[\left(\sqrt{1 - \frac{2}{1+x_2}}\right) - \left(\sqrt{1 - \frac{2}{1+x_1}}\right)\right]\left[\sqrt{1 - \frac{2}{1+x_2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{1+x_1}}\right]}{\left[\sqrt{1 - \frac{2}{1+x_2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{1+x_1}}\right]}$$

forma una dif de cuadrado

$$= \left(1 - \frac{2}{1+x_2} - 1 + \frac{2}{1+x_1}\right) \cdot \frac{1}{\left[\sqrt{1 - \frac{2}{1+x_2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{1+x_1}}\right]}$$

$$= \left(\frac{2}{1+x_1} - \frac{2}{1+x_2}\right) \cdot \frac{1}{\left[\sqrt{1-\frac{2}{1+x_2}} + \sqrt{1-\frac{2}{1+x_1}}\right]}$$

$$= 2\left[\frac{(1+x_2)-(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}\right] \cdot \frac{1}{\left[\sqrt{1-\frac{2}{1+x_2}} + \sqrt{1-\frac{2}{1+x_1}}\right]}$$

$$= \frac{2(x_2-x_1)}{(1+x_1)(x_2+1)} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left[\underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{1+x_2}}}_{>0} + \underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{1+x_2}}}_{>0}\right]}_{>0}}$$

Primero notar $\underbrace{\qquad\qquad}_{P}$

Ahora queda analizar $(-\infty, -1)$ y $[1, \infty+)$ por separado bajo premisa $x_1 < x_2$.

Si $x_1 < x_2 \in [1, \infty+)$ signos

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(x_2-x_1)}{(1+x_1)(x_2+1)} \cdot \frac{1}{[\quad P \quad]} = \frac{2\,(+)}{(+)\,(+)} \cdot \frac{1}{(+)} = (+)$$

$\Rightarrow f(x)$ creciente si $x \in [1, \infty+)$

Si $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$

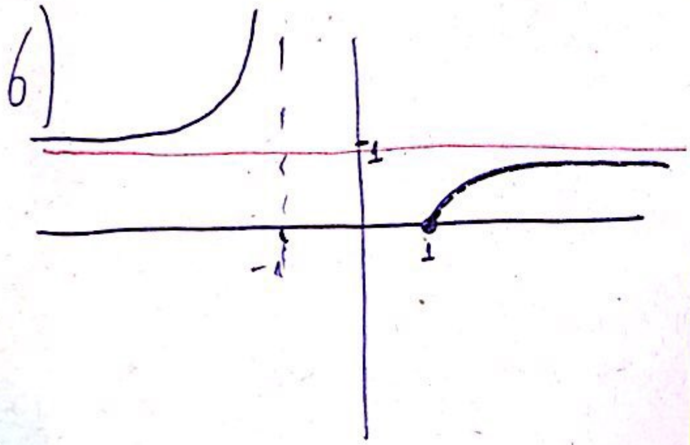
$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(x_2 - x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)} \cdot \frac{1}{[\varphi]}$$

Sigmos

$$= \frac{2 \; (+)}{(-)\;(-)} \cdot \frac{1}{(+)} = (+) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

$\Rightarrow f(x)$ creciente si $x \in (-\infty, -1)$

6)



redefimo

$$f^{'}(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}}$$

$f^{'}: (-\infty, -1) \rightarrow (1, \infty+)$

o bien

$f^{'}: [1, \infty+) \rightarrow [0, 1)$

} ambos por def som sobreyectivos y por 4) es inyectiva.

$$y = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}} \quad /()^2$$

$$\Rightarrow \frac{1 - y^2}{2} = \frac{1}{1+x} \quad /()^{-1}$$

$$\frac{2}{1 - y^2} = 1 + x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{1 - \cancel{x}^2} - 1$$

} lo que tiene sentido pues $x \neq -1, 1 \;\wedge\; f(x) = y \geq 0$

Terminamos !

cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl