MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 10: Sucesos entre sus sesiones de sucesiones

29-30 de Mayo de 2019

P1. ***[Definición Convergencia]*** Demuestre utilizando definición de convergencia.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}+1} = 1$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$

c) $\lim_{n\to\infty} n^2+1$ diverge

d) $\lim_{n\to\infty} max\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\}$ calcule su límite y demuéstrelo.

P2. ***[Calcular Límites]*** Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n$

b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k+n})^2$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+4}\right)^n$

f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}, a \neq b$

h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}, a, b > 0$

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+100n^2+3}$

j) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$

P3. ***[Trabajemos con un poco más de teoría]***
Sea (a_n) una sucesión tal que existe $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Indicación: Probar que si $x_n \to l$ y se tiene $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geq n$, entonces $x_{f(n)} \to l$

P4. ***[Sándwich]***
Usando que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ para todo $a > 0$ y el Teorema del Sándwich, calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n + 5^n + 3^n}$$

P5. ***[Sucesión y función]***
Sea (x_n) una sucesión convergente a $l \in \mathbb{R}$, y sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente.

a) Pruebe que la sucesión $(x_{f(n)})$ es convergente a l.

b) Calcule $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$

P6. ***[Recurrencia]***

Considere la sucesión definida mediante la recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \cdot (1 + a_{n-1}^2), \text{con } a_0, a_1 \in (0,1)$$

a) Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2), a_n \in (0,1)$.

b) Muestre que a_n es convergente.

c) Calcule el límite.

P7. ***[Sucesión creciente]***

Sea (u_n) una sucesión creciente y (v_n) una sucesión decreciente, tales que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$. Pruebe que (u_n) y (v_n) convergen y tienen el mismo límite.

P8. ***[Función/PROPUESTO]***

Una función real f se dice continua en $x_0 \in Dom(f)$ si toda sucesión (x_n) tal que $x_n \to x_0$ y que $x_n \in Dom(f), \forall n \in \mathbb{N}$ entonces la sucesión $(f(x_n))$ tiene límite y $f(x_n) \to f(x_0)$, y diremos que es continua (a secas) si f es continua en todo su dominio.

a) Pruebe que la función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ es continua.

1) Pruebe que es continua en $x_0 = 0$
2) Pruebe que si $x_0 > 0$y $x_n \to x_0$, entonces existe $M > 0$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq n_0), \sqrt{x_n} > M$
3) Usando lo anterior pruebe que $\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0} \to 0$

b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$

P9. ***[Propuesto]⇒[BRÍGIDO]***

Una sucesión finita de números reales es tal que la suma de 7 términos consecutivos cualesquiera es negativa, y la suma de 11 términos consecutivos cualesquiera es positiva.

¿Cuál es el mayor número de términos que puede tener tal sucesión?

Notitas:

1. P1) Esta pregunta busca que comprendan la definición de convergencia, para esto es recomendable tener la definición y desglosar cada conectivo lógico o cuantificador y ver que hace para el conjunto dado, estudien los casos $\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

2. P2) Esta pregunta busca que a través de maniobras convenientes y de equivalencias lleguen a expresiones que sean más fáciles de trabajar.
   Unos ejemplos clásicos de esto es multiplicar por un 1 conveniente, bajo el argumento de $a_n = a_n \cdot 1$, usualmente se usa esto cuando tengo expresiones racionales con algún grado de polinomio en numerador y denominador, distintos o iguales.
   También cuando hay expresiones que son diferencias de expresiones poco trabajables como $\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot 1 = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
   Observación:Esto también se puede hacer para cualquier diferencia de polinomios de igual grado, propuesto!!