- $X_n \to l \iff \lim\limits_{n\to\infty} X_n = l \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \mid |X_n - l| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$ ¡Siempre!

- X_n nula si $X_n \to 0$.
- X_N acotada si $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \mid |X_n| \leq M$.

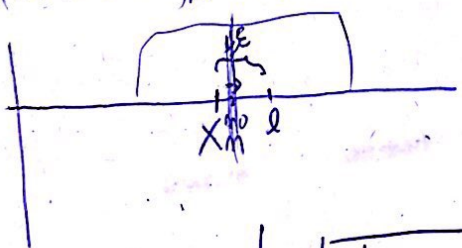
$\iff -M \leq X_n \leq M$.

- Teorema: Si (S_n) es una sucesión que converge a $l_1 \in \mathbb{R}$ y también $l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow l_1 = l_2$

P1)

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = 1$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) / |X_n - l| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ } Definición



$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$

$\sqrt{\alpha} \geq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \infty+]$

$\alpha = \frac{1}{n} + 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \geq 0 + 1$ Toda raíz es ⊕ o 0

Además $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+1} \geq 1} \geq 0$ $/+(-1)$ Sumo ambos lados -1, y tomo la desigualdad de la izq

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1 \geq 0$

Entonces $\left|\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1}_{\geq 0}\right| \leq \varepsilon$ # Lo que está dentro de $|\cdot|$ siempre ≥ 0.

$n \neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1 \leq \varepsilon$ $/+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} \leq \varepsilon+1$ $/()^2$ Por que?

$f(n) = \sqrt{\frac{1}{n}+1} \geq 0 \wedge \varepsilon+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}+1 \leq (\varepsilon+1)^2$ $\Rightarrow g(x) = x^2 / g: \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}^+_0$

Biyectiva, sólo cuando cumplo esto puedo elevar al cuadrado

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \underbrace{(\varepsilon+1)^2 - 1}_{>0}$ $/\cdot n > 0$

$1 \leq ((\varepsilon+1)^2 - 1)n$

$\frac{1}{(\varepsilon+1)^2 - 1} \leq n$

Una vez que tengo una cota de n, puedo encontrar un n_0 a partir del cual converge

basta tomar $\underbrace{\left\lfloor \frac{1}{(\varepsilon+1)^2 - 1} \right\rfloor} + 1 = n_0$

La función cajón me asegura que es natural y el $+1$ me asegura que se cumple, recordemos que es a partir de n_0.

PDQ: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n-1} = \dfrac{2}{3}$.

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0\ \left|\frac{2n+3}{3n-1}-\frac{2}{3}\right| \leq \varepsilon. \Big\}\ \text{Definición}$$

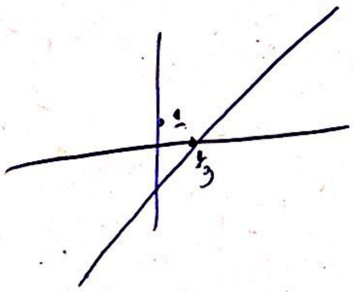
$$\frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2(3n-1)}{3(3n-1)} = \frac{3(2n+3)-6n+2}{3(3n+1)}$$

, tomo lo de adentro para ver como se comporta.

$$= \frac{11}{\underbrace{3}_{+}\underbrace{(3n-1)}}\ \Big\}\ \oplus$$

$\forall n \geq 1$

↳ Es una función lineal que es positiva a partir de $\frac{1}{3}$.



pues en particular $n \geq 1 \geq \frac{1}{3}$

Por lo que si $n\geq 1 \Rightarrow \dfrac{2n+3}{3n-1} - \dfrac{2}{3} \geq 0$

$$\Rightarrow \left|\frac{2n+3}{3n-1}-\frac{2}{3}\right| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+3}{3n-1}-\frac{2}{3} \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{3(3n-1)} \leq \varepsilon \qquad 3n+1 \geq 0,\ \text{si } n\geq \frac{1}{3}$$

todo ≥ 0

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3n+1} \leq \frac{3\varepsilon}{11} \Leftrightarrow 11 \leq 3\varepsilon(3n+1) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad 11 \leq 3\varepsilon(3m+1)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{11}{3\varepsilon} - 1 \leq 3m$

$\Leftrightarrow \quad \frac{11-3\varepsilon}{9\varepsilon} \leq m$ Encontré una cota.

basta tomar $\overbrace{\left\lfloor \frac{11-3\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rfloor}^{\in \mathbb{N}} + 1 = m_0$ ↗ $m\in$ Asegura que se tiene.

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+1} = \frac{2}{3}$ tomamos la convergencia

[CONTRADICCIÓN]

iii) Supongamos que converge! Para demostrar.

PDQ $\lim_{n\to\infty} n^2+1 = x_n$ diverge !!

Si converge $\exists\, l \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \; |n^2+1-l| \leq \varepsilon$ Definición de convergencia

Como es $\forall \varepsilon > 0$

en particular $\varepsilon = 1$ debe cumplir # Todos los elementos del conjunto lo cumplen.

$n^2+\cancel{1} - l \leq \cancel{1} \quad \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \quad n^2 \leq l \quad / \forall n\geq n_0 \; l>0 \quad / \sqrt{\ } \; \Rightarrow$ Biyectiva

$\Rightarrow \quad n \leq \sqrt{l}, \quad \forall n \geq n_0$

Los naturales son acotados

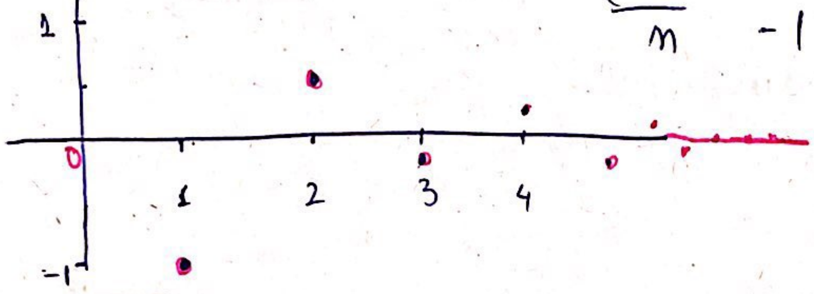
Sea $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, \sqrt{l}\}, \forall n \geq n_0, n \leq M$ $\times$

Scanned with CamScanner

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$ $n \neq 0$

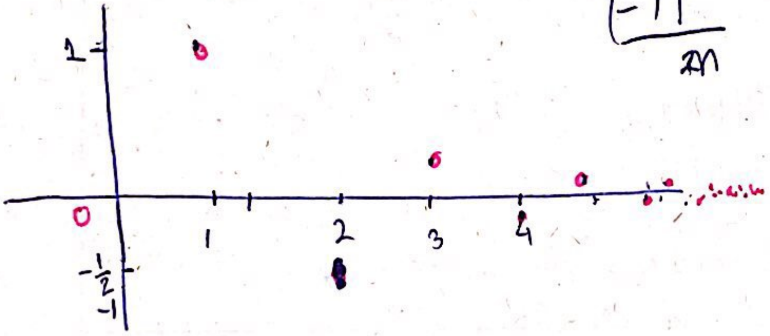
Veamos su comportamiento.

$\frac{(-1)^n}{n}$ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$



$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$



$\max\left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

$\left\{ \underset{n=1}{\max\{-1, 1\}}, \underset{n=2}{\max\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}}, \underset{n=3}{\max\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}} \dots \right\}$

$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \right\} = \frac{1}{n}$ su lím conocido y converge a igual

Pero esto es sólo la intuición !! !! $\forall$ la vida.

Golazo de media cancha

$\max\{A, B\} = \frac{A+B}{2} + \frac{|A-B|}{2}$

Propiedad que me permite calcular el máximo de manera algebraica. $\min\{A,B\} = \frac{A+B}{2} - \frac{|A-B|}{2}$

Scanned with CamScanner

$$\max\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$$

$$= \frac{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}{2} + \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{2n}\left[1 - 1\right]}_{\to 0} + \left|\frac{(-1)^n}{2n}\left[1+1\right]\right|$$

$|(-1)^n| = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1 \dots\}$ Si le tomo valor absoluto siempre es 1.

$$= \frac{|(-1)^n| \cdot 2}{2n} = \frac{1}{n} \quad \boxed{///}$$

Su límite y convergencia lo tenemos de un comienzo, por prop arquimediana.

[Si y, es un número real y, x>0
Existe un entero positivo tq $nx > y$]

Cualquier número por grande que sea, existe un natural que multiplicado por un positivo x es mayor! El caso del apunte es el caso particular de $y = 1$.

P2| Calcular los límites

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n \cdot \dfrac{(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)}$ } 1 conveniente

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \cdot \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ } 1 conveniente

Alg límites

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\text{por P1} \to 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{1/n \to 0}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}.$

Yo ~~Comoncorp~~ Aplico todo el límite al mismo tiempo.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2$

$\alpha_1^2 \geq 0$, $\alpha_2^2 \geq 0$ . . . $\alpha_n^2 \geq 0$

$\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_i^2 \geq 0$

A una fracción le quito elementos positivos del denominador

$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2$

$0 \leq \quad = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} 1$ } $\sum$ constante.

$0 \leq \quad = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (n-1+1) \cdot 1$

$0 \leq \quad = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$n! = \underbrace{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-1)\text{ elementos}}$$
$\le n \quad \le n \quad \le n$

Como son elementos menores o iguales a n, si los reemplazo por n, será una cota superior,

$$0 \le \frac{n!}{n^n} \le \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

$$0 \le \lim \frac{n!}{n^n} \le \lim \frac{1}{n}$$
$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$
$0 \qquad\qquad 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{n!}{n^n} \to 0.$$

d) $$\lim \frac{2^n+1}{n^2 \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot 3^{n+1}} + \frac{1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{nula}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{n^2} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} \Rightarrow$$

2 veces, sucesión nula

acotada → Teorema nula por acotada

q^n, $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n \to 0$.

$$\lim \frac{2^n+1}{n^2 \cdot 3^{n+1}} = 0$$

e) $\lim \left(\underbrace{\frac{3n-1}{2n+4}}_{s_n}\right)^n$

$\lim s_n = \frac{3}{2} > 1 = \cancel{q}$

$\Rightarrow \lim (s_n)^n = \infty$ por aparte.

divergue $\parallel$

$$\frac{2^n}{n^2 3^{n+1}} \leq \frac{2^n+1}{n^2 \cdot 3^{n+1}} \leq \frac{2^n+2^n}{n^2 3^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{n^2 \cdot 3^{n+1}} \Big/ \sqrt[n]{\ }$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}} \leq \frac{\sqrt[n]{2} \cdot 2}{\sqrt[n]{n^2} \cdot 3 \cdot \sqrt[n]{3}}$$

$\downarrow$ $2/3$ $\qquad$ $\downarrow$ $2/3$

Scanned with CamScanner

i)

mayor elemento

$$m^3 \le m^3 + 100m^2 + 3 \le m^3 + \overbrace{100m^3}^{100m^2 \le 100m^3} + \overset{3 \le 3m^3}{3m^3} \quad / \sqrt[n]{}$$

$$\sqrt[n]{m^3} \le \sqrt[n]{m^3 + 100m^2 + 3} \le \sqrt[n]{104} \cdot \sqrt[n]{m^3}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 1$$

Por Teorema Sándwich

//

P3)

Sea (a_n) se que existe $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n$. Dem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

\# Indicación

Si $X_n \to l$, y se tiene $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(n) \geq n \Rightarrow X_{f(n)} \to l$

$f(n) = \bar{n} \geq n \geq n_0$

$\Rightarrow \to l$

\# Indicación

Si $\cancel{X}_n \to l$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \; |\cancel{X}_n - l| < \varepsilon$ (1) Definición

Veamos que si $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\underline{f(n) \geq n}$ *

↳ creciente como $n+1$, $n^2 + 1000$ etc.

$\Rightarrow X_{f(n)} \to l$,

PDQ.

$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0') \; \underbrace{|X_{f(n)} - l| < \varepsilon}_{(-)}$ lo que quiero.

Nosotros sabemos que dado $\varepsilon > 0$

$|X_n - l| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ (2)

luego si $n_0' = n_0$

$\Rightarrow f(n_0') \geq n_0 \Rightarrow |X_{f(n_0')} - l| < \varepsilon$

Además si $\underline{n \geq n_0' = n_0}$

$\Rightarrow f(n) \geq n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq n_0 \Rightarrow |X_{f(n)} - l| < \varepsilon$ //

$n \cdot a_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$

PDQ $a_n \to 0$

$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists\, n' \geq n) : |a_{n'} - 0| > \varepsilon$

ε fijo

$n' = f(n) \geq n$

(Para cada n $\exists n' \geq n$

$|a_{f(n)} - 0| > \varepsilon$

Se tiene $\underline{|a_{f(n)}| > \varepsilon}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

Indicación ACÁ USE LA INDICACIÓN !!

Pero.

$\underbrace{a_n \cdot n}_{} \to l \Rightarrow f(n) \cdot a_{f(n)} \to l$

$c_n \to l \Rightarrow c_{f(n)} \longrightarrow l$

$\Rightarrow c_n$ acotada pues converge

pero

$|c_n| = |f(n) \cdot a_{f(n)}| = |f(n)||a_{f(n)}| \geq f(n) \cdot \varepsilon$

$\geq n \cdot \varepsilon$

$|c_n| \geq n \cdot \varepsilon \to \infty$

P4.1

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 5^{n} + 3^{n}}$$

Si bien $7^{n}, 5^{n}, 3^{n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n}+5^{n}+3^{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 7$$

$$= 7 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n}+5^{n}+3^{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n}+7^{n}+7^{n}}$$

$$7 \leq \qquad \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{7^{n}}$$

$$7 \leq \qquad \leq 1 \cdot 7$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n}+5^{n}+3^{n}} \; //$$

P5)

a) Se hizo antes !!!

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$

Recordemos

$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'} \to e$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} \xrightarrow{} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + 1\right)^{n^2+1-1}$$

parte a)

$$\xrightarrow{} = \frac{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + 1\right)^{n^2+1}}{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + 1\right)}$$

$$= \frac{e}{1} \quad //$$

P6 Caso base $n=2$.

$a_1 \in (0,1)$

$a_0 \in (0,1)$ $\qquad a_2 = \frac{a_1}{2}(1+a_0^2)$

$\Rightarrow 0 < a_0 < 1$

$0 < a_0^2 < 1 \quad / +1$

$0 < 1 < a_0^2+1 < 2 \quad / \cdot \frac{1}{2}$

$0 < \frac{a_0^2+1}{2} < 1 \quad / \cdot a_1$

$0 < \frac{(a_0^2+1)}{2} a_1 < 1$ //

Inducción fuerte

Asumo k cumple

HI $\cancel{a_k} \in (0,1)$ $\quad a_{k+1} = a_k \frac{(1+a_{k-1}^2)}{2} \in (0,1)$

$a_k \in (0,1)$

$a_{k+2} = a_{k+1}\frac{(1+a_k^2)}{2}$ $\quad \Big|\ 0 < 1 < a_k^2+1 < 2 \quad / \frac{1}{2}$

$0 < \frac{a_k^2+1}{2} < 1 \quad / \cdot a_{k+1}$

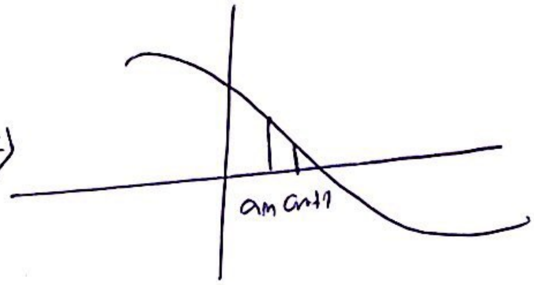
$0 < a_{k+1}\frac{(a_k^2+1)}{2} < 1$. $\blacksquare$

Scanned with CamScanner

ii) notar $a_{n+1} = a_n \dfrac{(a_{n-1}^2 + 1)}{2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow$$



Sucesión decreciente y acotada, por lo que converge.

iii) Como existe límite, yo puedo decir $\lim a_n = l$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim a_{k-1} \frac{(1 + a_{k-2}^2)}{2}$$

$$l = \lim a_n = \frac{\lim a_{k-1}}{2} + \lim \frac{a_{k-2}^2 \cdot a_{k-1}}{2} = \lim a_{k-1}$$

$$\Rightarrow l = \frac{l}{2} + \frac{(l^2 \cancel{+1})\, l}{2} \Rightarrow 0 = \frac{l}{\cancel{2}} \left[l^2 \cancel{+1} - 1 \right]$$

⊗ =

Es importante estudiar los casos y descartar los demás

$\Rightarrow l = 0$

$\Rightarrow l = \pm 1$

$l \neq -1$

$l \neq 1 \vee$ decreciente

$\Rightarrow l = 0$

$a_n \notin [0,1]^c$

P7 |

Sea una sucesión creciente

$u_n \uparrow$

$V_n \downarrow$

$\lim (u_n - V_n) = 0.$

PDQ $\lim u_n = \lim V_n = l.$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \mid U_n - V_n - 0 \mid < \varepsilon$

Si $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$

$-1 < \underline{U_n - V_n < 1} \quad / + V_n$

$\Rightarrow U_n < 1 + V_n < 1 + V_{n_0}$, $\exists n_0$

Entonces

Como $U_n \uparrow$ y acotada $\Rightarrow \exists \lim U_n$

Por TSM.

$\cdot -1 / \quad 1 > \underbrace{-U_n + V_n > -1}$

$\Rightarrow V_n > U_n - 1 > \underline{U_{n_0} - 1} \Rightarrow \exists \lim V_n$

Como $V_n \downarrow$ y acotada Por TSM.

Scanned with CamScanner

$$\lim U_n - V_n = 0$$

$$\lim U_n - \lim V_n = 0$$

$$\lim U_n = \lim V_n \quad //$$

Sólo puedo hacer este paso porque cada uno tiene lím por separado.

Sea s_n sucesión acotada

Ejercicio Adicional de control

$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$

I) Dem $\forall n > M$ $\quad \dfrac{1}{n + s_n} \leq \dfrac{1}{n-M}$

$\underbrace{-M \leq s_n} \leq M$

$-M \leq s_n \quad / + n$

$n - M \leq s_n + n \quad / ( )^{-1}$ # ojo la desigualdad

$\dfrac{1}{n-M} \geq \dfrac{1}{s_n + n}$ //

II) $\dfrac{1}{n+s_n} \to 0$

$\lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{n+s_n} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \left| \dfrac{1}{n+s_n} - 0 \right| < \varepsilon$

$\left| \dfrac{1}{n+s_n} \right| , \quad \dfrac{1}{n+s_n} \leq \dfrac{1}{n-M} < \varepsilon \quad , n > M$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} < \dfrac{1}{}(n-M) \Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon} + M$

basta $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} + M \right\rfloor + 1$, $\forall n \geq n_0 \geq M$ $\left| \dfrac{1}{n+s_n} \right| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n+s_n} \to 0$

$$\lim a_n = \lim \frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2}{2n+1}$$

$$= \lim n^2 \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$= \lim n^2 \left(\frac{\cancel{2n}+1 - \cancel{2n}+1}{4n^2-1}\right) = \lim \frac{2n^2}{4n^2-1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{2}{4-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{\cancel{\lim} 2}{\cancel{\lim 4} - \cancel{\lim \frac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

luego ii $\frac{1}{n \cdot a_n}$, entonces se va a 0 por parte anterior.

a_n converge ⇒ acotada

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl