MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 11:Más sucesos entre Sándwich y límites $e^x \wedge \ln x$

06 de Junio de 2019

P1. ***[Calcular límite]*** Calcule.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

P2. ***[Calcular Límites]*** Calcular los siguientes límites, si es que existen

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \ln\left(1+e^n+e^{2n}+e^{3n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n+2}{2n}\right)}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+b}{a^n-n}$ En los casos $a \in (0,1) \wedge a > 1$

P3. ***[Recordemos convergencia]***
Demuestre usando la definición de convergencia.
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n-(-1)^n} = 0$

P4. ***[Constante Euler-Mascheroni]BRÍGIDO***
Demuestre que $X_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\dfrac{1}{k} - \ln(n)$ e $Y_n = X_n - \dfrac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

P5. ***[Su sesión de Sucesión a mil]***
Considere (S_n) definida por:

$$S_n = \left(\frac{an+1}{2n}\right)^n \text{ con } a \in (0,\infty) \text{ fijo}$$

a) Demuestre que si $0 < a < 2$,S_n converge y calcule su límite.

b) Demuestre que si $a > 2$,S_n no es acotada ni convergente.

c) Estudie el límite de S_n cuando a=2, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$

d) Estudie el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\left(\frac{an+1}{2n}\right)^n}$$

P6. *[Función acotada*
Sea $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, una función tal que

$$1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x - 1, \forall x > 0$$

a) Demuestre que dada una sucesión (u_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(1)$$

.

b) Si además se sabe que $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_n)}{u_n - 1}$$

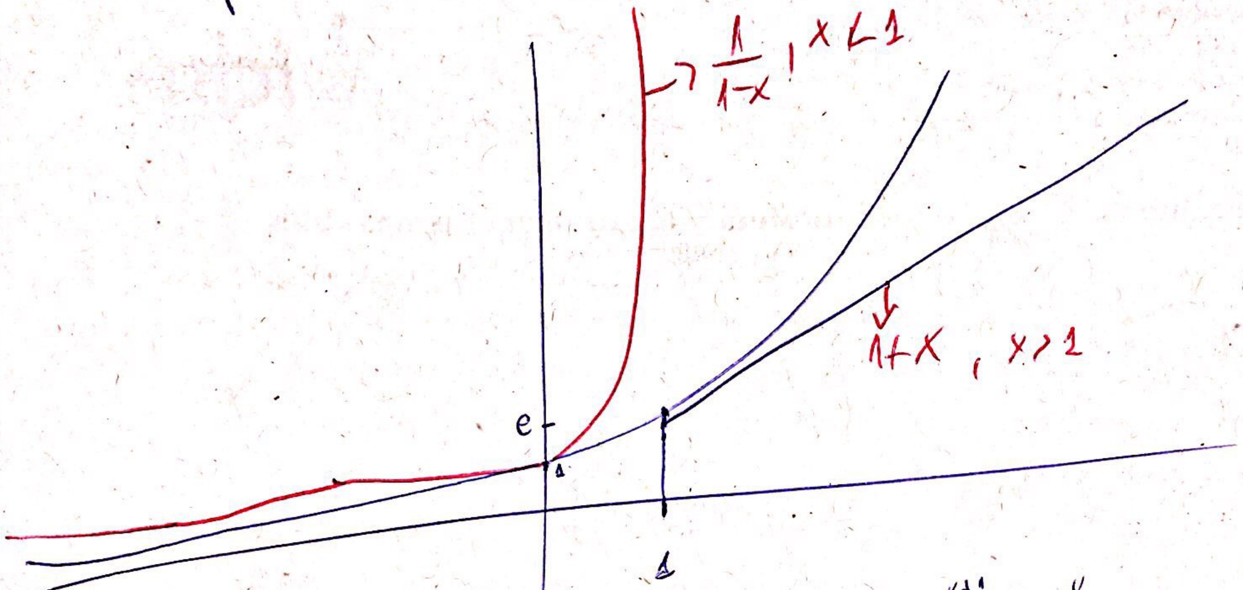
P7. Considere que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$u_n = \frac{n^n}{n! \cdot e^n}$$

a) Calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ y deduzca si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente o decreciente

b) Demuestre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Exp

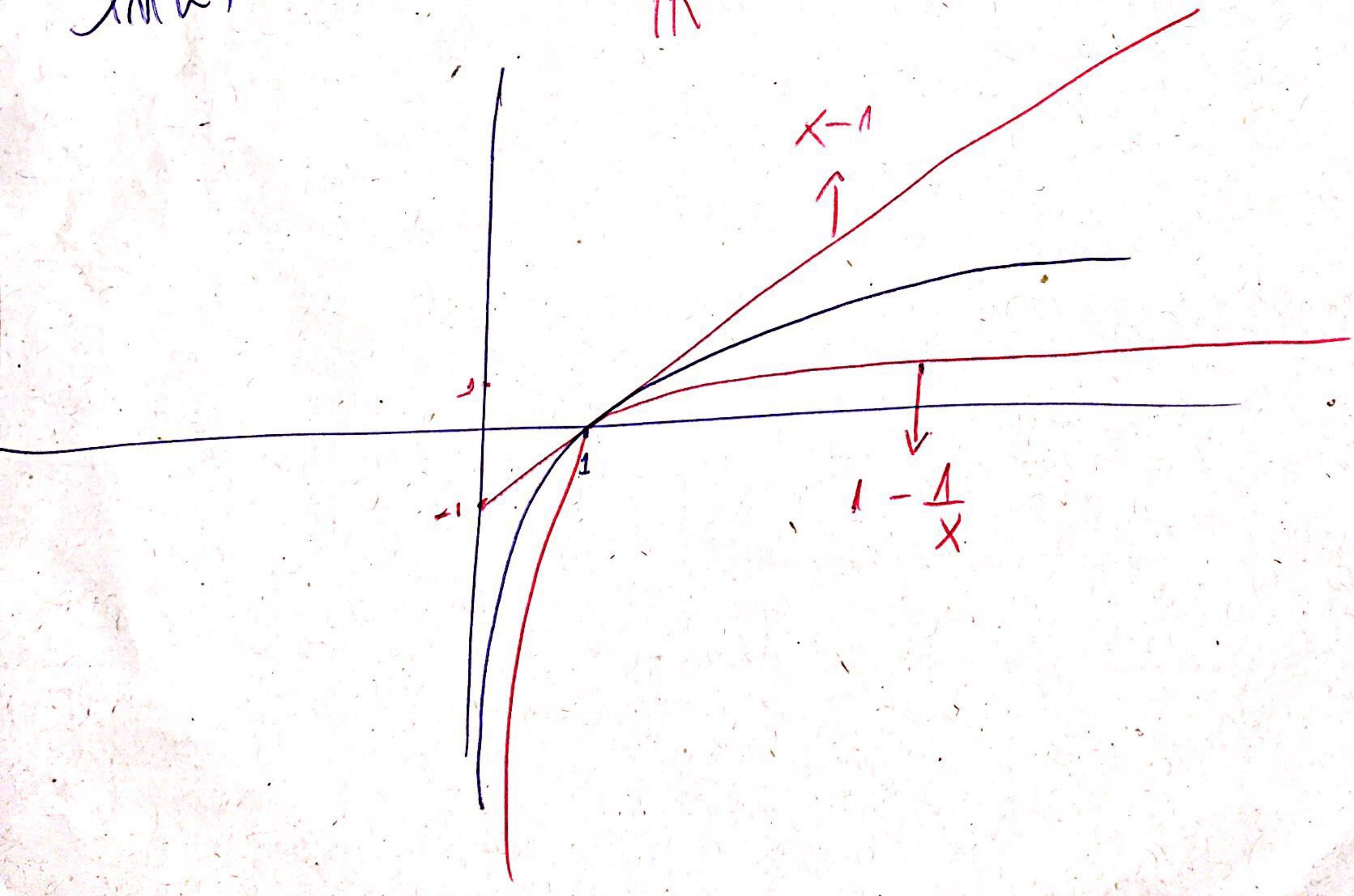


$e^x \leq e^{x+1} \leq e^x e$

$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$

ln(x)

$\mathbb{R}^+$



Teorema Bernoulli I.

I) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > -1)\ (1+h)^n \geq 1 + nh$.

Sucesión Importante

q^n, 1) $\lim q^n = 1$, si $q = 1$

2) $\lim q^n = 0$, si $|q| < 1$

3) $\lim q^n$ no existe si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

$\sqrt[n]{a}$, $a \in (0, \infty)$

$\sqrt[n]{a} \to 1$, $\forall a \in (0, \infty)$.

Bernoulli II

II) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > 0)\ (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$

$\sqrt[n]{n} \to 0$

III $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u \in (-1, \frac{1}{n}))$, $(1+u)^n \leq \frac{1}{1 - nu}$

Teorema S[redacted].

Def: Sea (S_n), si $\forall n \geq n_0$ $S_{n+1} \geq S_n$ creciente.

- Sea (S_n), Si $\forall n \geq n_0$, $S_{n+1} \leq S_n$ decreciente.

TSM

Si (S_n) es sucesión (estrictamente) creciente o decreciente a partir de un n_0 y acotada superiormente o inferiormente respectivamente, entonces converge.

Límite conocido 1) $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

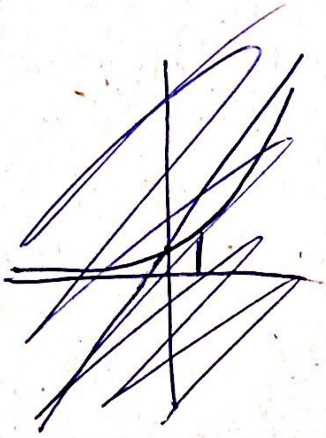
Teorema $\forall x \in \mathbb{R}$ la sucesión $S_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge.

La fución exponencial:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$

$\forall x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ Very Important.

$\Rightarrow$ $\boxed{1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \forall x, x < 1}$



La función logaritmo:

$\forall x \in (0, \infty)$ $1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$

- Para $a > 0$

$$a^x = e^{(x \ln(a))}$$

$\log_a x = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

exponencial y su continuidad

$$\lim e^{a_n} \to e^a$$

$\lim \left(\dfrac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \right) \to e^a$

- Versión log.

1) $\lim (\ ) \ln(a_n) \to \ln a$

2) $\left(\dfrac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a} \right) \to \dfrac{1}{a}$

P1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

notamos

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \ln(k+1) - \ln(k)$$

$$\Rightarrow \lim \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)\right]$$

telescópica! #intuición

$$= \lim \frac{1}{n}\left[\cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} + \dots + \cancel{\ln(n)} + \cancel{\ln(n-1)} + \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}\right]$$

$$= \lim \frac{1}{n}\left[\ln(n+1) - \ln(1)\right] = \lim \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{1}\right)$$
$$= \lim \ln\left(\sqrt[n]{n+1}\right) \overset{\text{Álgebra}}{=} \ln\left(\lim \sqrt[n]{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow = \ln(1) = 0$$

i) $\underbrace{\lim \frac{1}{n} \ln\left(e^{n}+e^{2n}+e^{3n}+1\right)}$

Esta expresión llamada $\blacktriangledown$

Recordemos que $\ln$ es creciente, Así que si quito o sumo positivos ocurre lo usual !! ☺

$$\frac{1}{n}\ln e^{3n} \le \blacktriangledown \le \frac{1}{n}\ln\left(4e^{3n}\right)$$

$$= \frac{3n}{n} \qquad\qquad = \frac{1}{n}\left[(\ln 4)+\ln\left(e^{3n}\right)\right]$$

$$= 3 \qquad\qquad = \frac{\ln(4)}{n} + 3$$

→ constante.

Al aplicar Límite

$$3 \le \lim \blacktriangledown \le \cancel{\lim \frac{\ln(4)}{n}}^{\,0} + 3$$

Por Teorema Sándwich.

ii) $X_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

Es del tipo $(q_n)^n$, entonces

estudiemos $\lim q_n = \lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$

Scanned with CamScanner

Entonces

$$X_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n \longrightarrow 0$$

iii) $y_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{2n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^{1/n}$

Es del tipo $\sqrt[n]{a_n}$

y por ii $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow \quad y_n \longrightarrow 1$

iv) $\lim \frac{a^n+b}{a^n-n}$

Si $a \in (0,1) = a^n \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{a^n+b}{a^n-n} = \lim \frac{a^n+b}{a^n-n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim \frac{\cancel{\frac{a^n}{n}}^{0} + \cancel{\frac{b}{n}}^{0}}{\cancel{\frac{a^n}{n}}^{0} - 1} = \frac{0}{1} = 0$$

Recordando que $a_n \in (0,1)$ al elevarlo lo voy disminuyendo cada vez más.

Si $a > 1$

$1 > \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \lim \frac{a^n + b}{a^n - n} \cdot \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim \frac{1 + \frac{b}{a^n}}{1 - \frac{n}{a^n}}$$

$$= \lim \frac{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot b}{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n n}$$

Al igual que el caso anterior, recordamos q^n, si $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n \to 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{1 + \cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n b}^{\to 0}}{1 - \underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot n}^{\to 0}}_{|q|^n \cdot n^k}} = \frac{1}{1} = 1$$

$|q|^n \cdot n^k$ Apunte, gana exponencial

P3) Demuestre usando convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$$

Definición de convergencia

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \left|\frac{1}{n-(-1)^n} - 0\right| < \varepsilon$

Para poder ver todos los casos, tenemos que ver a través de la paridad,

Por lo que

Si n par $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha \frac{1}{n-(-1)^n} = \frac{1}{n-(-1)^{2k}} = \frac{1}{n-\underbrace{((-1)^2)^k}_{1}}$$

$$= \frac{1}{n-1}$$

Si n impar $n = 2k'-1$, $k' \in \mathbb{N}$

$$\alpha \frac{1}{n-(-1)^n} = \frac{1}{n-(-1)^{2k'-1}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} - 0 \right|$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} \right|$$

Si fuera par

$$\left| \frac{1}{n-1} \right| \geq 0 \; , \forall n \in \{1, 2 \ldots \}$$

$$n \geq 1$$

$$\frac{1}{n-1} \geq \quad \forall n \geq 1$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} \right| < \frac{1}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n-1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} + 1 < n \; ,$$

Luego para converger basta $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rfloor + 1$

$\forall n \geq n_0$ converge, pues $\left| \frac{1}{1-(-1)^n} - 0 \right| < \varepsilon$.

Veamos

X_n y su crecimiento, como bien recordamos se realiza a través de la diferencia entre 2 términos consecutivos de la sucesión

$$X_{n+1} - X_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \cancel{\frac{1}{n+1} + \ln}$$

Sabemos que si $x > 0$

$\Rightarrow \quad \ln(x) \leq x - 1$

$$\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1$$

$$= \frac{1 + n - n - 1}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow \quad X_{n+1} - X_n \leq 0$, X_n decreciente.

Veamos si está acotada

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Por desigualdad del log

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \cancel{1} + \frac{1}{k} - \cancel{1}$$
$$= \frac{1}{k} \quad , \forall k \geq 1$$

Entonces $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \quad , \forall k \geq 1$ sumamos hasta $n-1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow \quad \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln k+1 - \ln k$$

$$= \cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln(2)} + \dots \cancel{\ln n-1} - \cancel{\ln n-2} + \ln n - \cancel{\ln n-1}$$

$$= -\cancel{\ln(1)}^{0} + \ln(n) = \ln(n).$$

$$\Rightarrow \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = X_n$$

$0 \leq X_n$ Es ACOTADA!

Entonces por TSM converge. (Este limite le llaman de Euler Masheloni

Veamos $(y_n) = X_n - \frac{1}{n}$ / lim

$y_n \leq X_n$ / lim

$\lim y_n \leq \gamma$ Es acotada.

Veamos crecimiento

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - \frac{1}{n+1} - x_n + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \frac{1}{n}$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} \underline{- \ln(n+1)} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \underline{\ln(n)} + \underline{\frac{1}{n}}$$

$$= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$1 - \frac{n+1}{n} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad / + \frac{1}{n}$$

$$1 - 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$0 \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n} = y_{n+1} - y_n$$

Como es creciente es acotada superiormente y por TSM converge.

Luego $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ / lim

$$\lim y_n = \lim x_n - \cancel{\lim \frac{1}{n}}^{\to 0}$$

$$\lim y_n = \lim x_n$$

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl