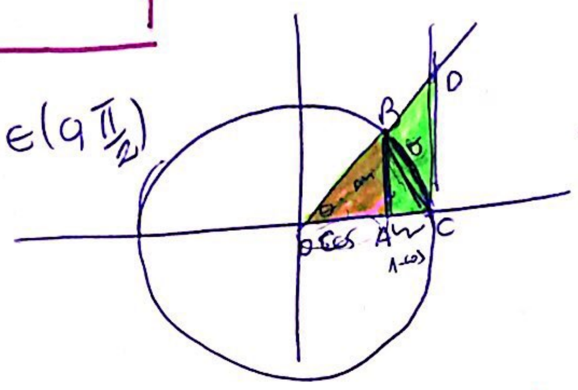
Demostremos por Teorema del Sándwich

límite fundamental del sen(x)!!

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1}$$

Sea $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$



$\sqrt{\operatorname{sen}^2 + (1-\cos)^2}$

$\sqrt{2 - 2\cos\theta}$

Veamos una visión geométrica

$$Á_{\triangle OAB} \le Á_{\triangleleft OCB} \le Á_{\triangle OCD}$$

Á(Algo) = Área algo

- la desigualdad no cambia, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) > 0$

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{2} \le \frac{\theta}{2} \le \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \quad / \cdot 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}, \quad \operatorname{sen}\theta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) \le \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \le \frac{1}{\cos\theta} \quad / ()^{-1}, \quad \operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \cos\theta \quad / \text{ Aplicando } \lim_{\theta\to 0} \text{ límite}$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos\theta} \geq \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \lim_{\theta\to 0} \cos\theta$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad\qquad 1$$

$\Rightarrow$ Por Teorema Sándwich $\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$

$f(x) = -f(-x)$

Pero sabemos que sen θ es Impar, en conjunto a θ, entonces $f(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \frac{-\operatorname{sen}(-\theta)}{-(-\theta)} = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} = f(-\theta)$

1) Evaluar y ver si es indeterminación
2) Álgebra límites y con conocidos llegar al límite

$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = f(\theta)$ es par, simétrica

$\Rightarrow \lim_{\theta \to 0} f(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ $\boxed{//}$

P1) a) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2+2}{\cos(\pi x)}$ lo primero que debemos hacer, es evaluar, pues

1) no ocurre por lo que solo reemplazo

en este caso por alg. de límites, no hay indeterminación

$= \frac{5^2+2}{\cos(5\pi)} = \frac{27}{-1} = -27$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x-2}$, si evalúo

1) es $\frac{0}{0}$

Scanned with CamScanner

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} \cdot \underbrace{\frac{(x+\sqrt{x+2})}{(x+\sqrt{x+2})}}_{1}$$

2)

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{x+2})} \quad , x \neq 2 \to \text{condiciono } x \neq 2$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{3}{2+\sqrt{4}} = \frac{3}{4} \,//$$

realizo el límite $\to 2$.

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^k} \quad , k \in \{1,2\}$$

$\underline{k=1}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1$$

límite conocido Pag 199 Apunte

$$= 1 - 1 = 0 \,//$$

$k=2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^2}$$

Lo haremos por $\underline{\text{teo}}$ sandwich.

Por introducción pag 11, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\bar{x} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

de  $\operatorname{sen}(x)\cos(x) \le x \le \operatorname{tg}(x)$ $\quad / \cdot(-1)$

$\iff -\operatorname{tg}(x) \le -x \le -\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ $\quad / + \operatorname{sen}(x)$

$\iff \operatorname{sen}(x) - \operatorname{tg}(x) \le \operatorname{sen}(x) - x \le \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ $\quad / \cdot \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

$$\iff \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{tg}(x)}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{x^2}$$

/ factorizo $\leftarrow \operatorname{sen}(x)$ $\rightarrow \operatorname{sen}(x)$

$$\iff \frac{\operatorname{sen}(x)\left[1 - \frac{1}{\cos(x)}\right]}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left[\frac{1 - \cos(x)}{x}\right]$$

/ sumo $\leftarrow$

$$\iff \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left[\frac{\cos(x) - 1}{\cos(x)\, x}\right] \le \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left[\frac{1 - \cos(x)}{x}\right]$$

/ factorizo (-1) $\leftarrow$ Paso ante ma

$$\iff \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}(-)\left[\frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)\, x}\right] \le \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left[\frac{1 - \cos(x)}{x}\right]$$

/ $\lim_{x \to 0}$

Recordemos $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

$\cos(0) = 1$

$\lim_{u \to 1} \frac{\ln u}{u - 1} = 1$

$\lim_{u \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Sándwich de sandía.

tomando límite $x \to 0$

$$\iff 1 \cdot (-1) \cdot \frac{0}{1} \le \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le 1 \cdot 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} = 0 \quad //$$

Scanned with CamScanner

d) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2}$, la función está mal definida para $x \in [0,1)$

Notar que si $x \in [0,1)$ no está definida

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2} \Rightarrow x \in [-1,0)$$

$$= \cancel{\lim_{x\to 0}} \frac{1-\cos(-1)}{1} = 1-\cos(-1)$$

Lo que ocurre acá es que como está indefinido para $x \to 0^+$, es decir $x \in [0,1)$, no tenemos límites laterales iguales, pero para poder dar una expresión calculamos el límite por izquierda!

Scanned with CamScanner

e) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x(|x-3|-5)}{x^2-4}$

1) Evaluamos

$$\frac{2(|-2-3|-5)}{4-4} = 2 \cdot \frac{0}{0}$$

2) Notemos que $|x-3|$ cambia su comportamiento según donde partemos x

si $x \in (3, \infty^+) \Rightarrow |x-3| = x-3$

si $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow |x-3| = 3-x$

- Como estamos tomando límite $x \to -2$ podemos tomar una vecindad, mientras contenga -2 !

- tomamos (como es debido) $x \in (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon)$ una vecindad de -2, $\varepsilon > 0$, en particular $\varepsilon = 2$.

Arbitrario, $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow x \in (-4, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x(|x-3|-5)}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{x(3-x-5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x\,(\cancel{x+2})}{(x-2)(\cancel{x+2})}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-x}{x-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$ //

Propuesto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^k} \quad , \quad k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

De qué depende?

El que me muestre desarrollo ~~antes~~ se ganará un dulce, Hasta agotar stock!

Scanned with CamScanner

9) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{\operatorname{sen}(x^2)} \cdot \underbrace{\frac{x^2\pi^2}{x^2\pi^2}}_{1}$ C.V.

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{1} \cdot x^2 \cdot \pi^2$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right]} \cdot \pi^2$

♡ Luego $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2}$ | Si $u=\pi x$ cuando $x\to 0 \Rightarrow u\to 0$ || justificación importante

$\Rightarrow \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u^2} = \frac{1}{2}$ } límite conocido

★ $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$ | Si $v=x^2$ cuando $x\to 0 \Rightarrow v\to 0$ ||

$\Rightarrow \lim_{\cancel{x}\to 0} \frac{\operatorname{sen}(v)}{v} = 1$ } límite conocido

Entonces nuestro límite final queda como

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\right]} \pi^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[1]} \cdot \pi^2 = \frac{\pi^2}{2}$ //

Scanned with CamScanner

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{e^{2(x-2)}-1} \cdot \underbrace{\dfrac{[(3-x)-1]}{[(3-x)-1]}}_{1}$

Por qué? querer formar $\left[\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{\ln(u)}{u-1}\right]$ conocido

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} \cdot \frac{2-x}{\left(e^{2(x-2)}-1\right)} \cdot \frac{2}{2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} \cdot \frac{2(x-2)}{e^{2(x-2)}-1} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} \cdot \frac{1}{\left[\dfrac{e^{2(x-2)}-1}{2(x-2)}\right]} \cdot -\frac{1}{2}$$

Sea $u = 3-x$, $x \to 2$

$\Rightarrow u \to 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} = \lim\limits_{u \to 1} \dfrac{\ln(u)}{u-1} = 1$

Sea $w = 2(x-2)$, $x \to 2$

$w \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{2(x-2)}-1}{2(x-2)} = \lim\limits_{w \to 0} \dfrac{e^{w}-1}{w} = 1$

$$= \frac{0}{0} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Scanned with CamScanner

c) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}$

1) Evaluar $\Rightarrow 1^{1/0}$

2) Matraca.

Propiedad consistencia. $e^{\ln(a^n)} = a^n$, siempre que e^x y $\ln(x)$ estén bien definidas.

$$\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x \to 0} \exp\left(\ln\left(\cos(x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \ln(\cos(x))\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \exp\left[\frac{\ln(\cos(x))}{1 - \cos^2(x)}\right]$$

Luego $h = \cos(x)$, si $x \to 0$

$h \to 1$

$$= \lim_{h \to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{1 - h^2}\right] = \lim_{h \to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{-(h-1)(1+h)}\right]$$

Por continuidad de e^x y $\ln(x)$ puede entrar el límite, además de alg de límites

$$= \exp\left[\lim_{h \to 1} \frac{\ln(h)}{h-1} \cdot \frac{-1}{1+h}\right] = \exp\left[1 \cdot \frac{-1}{1+1}\right] = e^{-\frac{1}{2}} //$$

Scanned with CamScanner

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\left[e^{x-x^2}-1\right]}{x-x^2}$

$u = x-x^2$, $x\to 0 \Rightarrow u\to 0$ $\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2}-1}{x-x^2} = \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}$

$\Rightarrow$ $= e^{0^2}\cdot 1 = 1$ //

e) $\lim_{x\to 1} (1-x)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (1)

$= \lim_{x\to 1} (1-x) \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

veamos si $w = 1-x$

$x\to 1 \Rightarrow w \to 0$ $\quad \frac{\pi}{2}x = (1-w)\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - w\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \lim_{w\to 0} \frac{w}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}w\right)}$

$= \lim_{w\to 0} \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{\frac{\pi}{2}w}\right]} \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$

$v = \frac{\pi}{2}w$, $w\to 0 \Rightarrow v\to 0$

(2) $= \lim_{v\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(v)}{v}} \cdot \frac{2}{\pi} = 1\cdot\frac{2}{\pi}$

(3) Luego junto todo

$\lim_{x\to 1} (1-x)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{2}{\pi} \circ \underbrace{1}_{\substack{x\to 1 \\ \operatorname{sin}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}$

Recuerdo lo más importante para el cambio de variable es que una vez que hacen esto no puede quedar con la variable anterior, y tender todo al mismo tiempo.

Scanned with CamScanner

P3 | a)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\text{sen}\, x| - |x|}{x}$$

Veamos que podemos estudiar la vecindad $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x) - x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

b)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\text{sen}\, x|| - |x|}{x}$$

Veamos que podemos estudiar $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{-\text{sen}(x) + x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\left[\frac{\text{sen}(x)}{x}\right] + \frac{x}{x} = -1 + 1 = 0$$

Como límites laterales son iguales el límite Existe y vale 0.

Scanned with CamScanner

Terminamos!! Recuerden
postear sus dudas o preguntarme
por algún medio.
pgamez@dim.uchile.cl.

Scanned with CamScanner