MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 13:Preparación C6

17 de Junio de 2019

P1. ***[Demuestre usando la definición*** $[\epsilon, \delta, m$ ***y*** $M]$ ***según corresponda]*** Calcule.

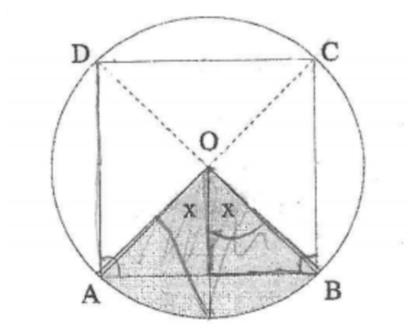
I $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

II $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} = \text{no existe} \clubsuit$

III $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x-6}{2} = 1$

IV $\displaystyle\lim_{x\to 1} 2x^2 - 1 = 1$

P2. ***[Calcular Límite]*** Considere la circunferencia de centro O y radio r de la figura en la que se ha inscrito el rectángulo ABCD.



Se pide calcular:

$$\lim_{\widehat{AB}\to 0} \frac{\bigcirc\{AOB\}}{\square\{ABCD\}}$$

P3. ***[Funcionamos? versión n-ésima]***

Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(1+e^x)\cdot(x^2-4)}$$

a) Estudie la función

b) Determine si las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son o no asíntotas verticales de f, justifique.

c) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Averigüe si existen asíntotas horizontales a través de su ecuación.

d) Calcule si existen o no asíntotas oblícuas.

P4. [PROPUESTO ANÁLOGO AL ANTERIOR]Considere la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$. Se pide:

a) Encontrar dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas.

b) Demostrar que $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1 - x_2)(1 + x_2x_1)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}$$

Use este resultado para estudiar crecimiento de f.

VER LUEGO DE HABER TEMRINADO
Solucion importante, existen asintotas horizontales y verticales, en $x = -1$,$x = 1$ y $y = 0$, no hay oblicuas

$$\text{Límite por la derecha:} \quad \lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ x\in A^+}} f(x)$$

$$\text{Límite por la izquierda:} \quad \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ x\in A^-}} f(x)$$

De esta manera, para $L \in \mathbb{R}$ la definición $\varepsilon - \delta$ queda:

$\lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = L$	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (\bar{x}, \bar{x}+\delta] \cap A : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A$ tal que $0 < x - \bar{x} \leq \delta : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
$\lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) = L$	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in [\bar{x}-\delta, \bar{x}) \cap A : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A$ tal que $0 > x - \bar{x} \geq -\delta : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$

- **Límites hacia infinito**. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $L \in \mathbb{R}$.
  - Si A es no acotado superiormente, entonces diremos que:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in [m, \infty) \cap A : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A$ tal que $x \geq m : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$

  - Si A es no acotado inferiormente, entonces diremos que:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in (-\infty, m] \cap A : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$
	$\iff$	$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A$ tal que $x \leq m : \lvert f(x) - L\rvert \leq \varepsilon)$

  - Observación: Se tiene que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$.

- **Límites infinitos**. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A'$. Diremos que:

$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \infty$	$\iff$	$(\forall M > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in ([\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \setminus \{\bar{x}\}) \cap A : f(x) \geq M)$
$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = -\infty$	$\iff$	$(\forall M < 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in ([\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta] \setminus \{\bar{x}\}) \cap A : f(x) \leq M)$

  Observación: Se tiene que $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to\bar{x}}(-f(x)) = \infty$.

- **Asíntotas**. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.
  - **Asíntotas horizontales**: Para $L \in \mathbb{R}$, diremos que la recta $y = L$ es asíntota horizontal de f si A es no acotado (superior y/o inferiormente) y:

$$\boxed{L = \lim_{x\to\infty} f(x), \text{ o bien, } L = \lim_{x\to-\infty} f(x)}$$

    Una función tiene a lo más dos asíntotas horizontales.

  - **Asíntotas verticales**: Para $\bar{x} \in A'$, diremos que la recta $x = \bar{x}$ es asíntota vertical de f si alguno de los siguientes se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = \infty, & \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x\to\bar{x}^+} f(x) = -\infty, & \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) = -\infty \end{array}}$$

  - **Asíntotas oblicuas**: Para $m, n \in \mathbb{R}$, diremos que la recta $y = m \cdot x + n$ es asíntota horizontal de f si A es no acotado (superior y/o inferiormente) y:

$$\boxed{\begin{array}{l} m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m \cdot x), \qquad \text{o bien} \\ \\ m = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - m \cdot x) \end{array}}$$