MA1001-2 Introducción al Cálculo
Profesor: Matías Godoy Campbell
Auxiliares: Nicolás Cornejo y Cristian Palma

Límites por definición

Nicolás Cornejo

A continuación se presentan las caracterizaciones o definiciones de los distintos tipos de límites de funciones que pueden aparecer mediante ϵ, δ, m y M, como la variable x puede tender a $\overline{x}, \overline{x}^+, \overline{x}^-, +\infty, -\infty$ y la función f puede tender a $l, l^+, l^-, +\infty, -\infty$ se genera un total de $5 \cdot 5 = 25$ posibles variantes. La idea no es que se las aprendan todas, pues si comprenden a que se debe cada cuantificador y variable, podrán escribirlas sin necesidad de memorizarlas.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

- $\overline{x} \in A'$ si $x \to \overline{x}$
- $\overline{x} \in (A^+)'$ si $x \to \overline{x}^+$
- $\overline{x} \in (A^-)'$ si $x \to \overline{x}^-$
- A no es acotado superiormente si $x \to +\infty$
- A no es acotado inferiormente si $x \to -\infty$

Entonces se tendrán las siguientes caracterizaciones/definiciones:

1. $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < |x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$
2. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < x - \overline{x} < \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$
3. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ -\delta < x - \overline{x} < 0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists m > 0 : \forall x \in A,\ x \geq m \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists m < 0 : \forall x \in A,\ x \leq m \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$
6. $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = l^+ \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < |x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow 0 < f(x) - l \leq \epsilon$
7. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^+} f(x) = l^+ \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < x - \overline{x} < \delta \Rightarrow 0 < f(x) - l \leq \epsilon$
8. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-} f(x) = l^+ \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ -\delta < x - \overline{x} < 0 \Rightarrow 0 < f(x) - l \leq \epsilon$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l^+ \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists m > 0 : \forall x \in A,\ x \geq m \Rightarrow 0 < f(x) - l \leq \epsilon$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l^+ \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists m < 0 : \forall x \in A,\ x \leq m \Rightarrow 0 < f(x) - l \leq \epsilon$

11. $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = l^- \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < |x-\overline{x}| < \delta \Rightarrow -\epsilon \leq f(x) - l < 0$
12. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^+} f(x) = l^- \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < x-\overline{x} < \delta \Rightarrow -\epsilon \leq f(x) - l < 0$
13. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-} f(x) = l^- \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ -\delta < x-\overline{x} < 0 \Rightarrow -\epsilon \leq f(x) - l < 0$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l^- \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists m > 0 : \forall x \in A,\ x \geq m \Rightarrow -\epsilon \leq f(x) - l < 0$
15. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l^- \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists m < 0 : \forall x \in A,\ x \leq m \Rightarrow -\epsilon \leq f(x) - l < 0$
16. $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < |x-\overline{x}| < \delta \Rightarrow f(x) \geq M$
17. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < x-\overline{x} < \delta \Rightarrow f(x) \geq M$
18. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ -\delta < x-\overline{x} < 0 \Rightarrow f(x) \geq M$
19. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists m > 0 : \forall x \in A,\ x \geq m \Rightarrow f(x) \geq M$
20. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists m < 0 : \forall x \in A,\ x \leq m \Rightarrow f(x) \geq M$
21. $\lim\limits_{x\to\overline{x}} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < |x-\overline{x}| < \delta \Rightarrow f(x) \leq M$
22. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ 0 < x-\overline{x} < \delta \Rightarrow f(x) \leq M$
23. $\lim\limits_{x\to\overline{x}^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists\delta > 0 : \forall x \in A,\ -\delta < x-\overline{x} < 0 \Rightarrow f(x) \leq M$
24. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists m > 0 : \forall x \in A,\ x \geq m \Rightarrow f(x) \leq M$
25. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists m < 0 : \forall x \in A,\ x \leq m \Rightarrow f(x) \leq M$

Observación: El ϵ y M se usan para la variable $f(x)$, mientras que el δ y m se usan para la variable x. Además, en general los ϵ y δ se usan para expresar que algo puede ser muy pequeño, mientras que el M y m se usan para expresar que algo puede llegar a ser muy grande.

Nota: Puede notar que muchas de las definiciones se parecen mucho, pero tienen cambios sutiles que marcan la diferencia entre uno y otro límite. Es de suma importancia comprender el rol de cada una de las variables y cuantificadores que acompañan a cada una.

Nota 2: En algunos textos o en el apunte, puede ver que se escriben de otras formas, ahí pueden ver cuál les parece más cómoda, a mí me gusta escribirlos así, además no es difícil ver que son equivalentes, por ejemplo:

$$\begin{aligned} x \in A \cap [\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta] &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in [\overline{x}-\delta, \overline{x}+\delta] \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x}-\delta \leq x \leq \overline{x}+\delta \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge -\delta \leq x-\overline{x} \leq \delta \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge |x-\overline{x}| \leq \delta \end{aligned}$$