# **Tutoría Bailable** C6 DIM

*Dragon Quest en Smash implica que Goku estará en Smash*

Introducción al Cálculo - Introducción al Álgebra - Semestre Otoño 2019

21 de junio de 2019


---

## Álgebra

**P1. Banjo Kazooie confirmed**

Nosotros usamos nuestras operaciones normales, pero de repente llegó Banjo Kazooie llega desde su mundo al nuestro usando el mundo smash como portal, y encontramos que suma y multiplica los números enteros de forma distinta a la nuestra, ustedes, como buenos estudiantes de $1^{er}$ semestre de ingeniería en plan común, deciden echarle un ojo. Para poder "transformar"sus operaciones y números a nuestras operaciones, vamos a hacer lo siguiente:

Considere las estructuras algebraicas $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ con la suma y producto nuestros y $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, en que $\oplus$ y $\odot$ son la suma y multiplicación de Banjo-Kazooie, definidos de la siguiente forma:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \qquad a \oplus b = a + b + 1 \tag{1}$$

$$a \odot b = a + b + ab \tag{2}$$

*a*) Encuentre el neutro para $\odot$

*b*) Demuestre que existe $f$ tal que:

$$f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, \oplus) \text{ es isomorfismo} \tag{3}$$

$$f : (\mathbb{Z}, \cdot) \to (\mathbb{Z}, \odot) \text{ es isomorfismo} \tag{4}$$

mostrando explícitamente $f$ y verificando que cumple lo pedido.
*Indicación:* Si n $\in \mathbb{Z}, n > 0$, escríbalo como $n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{n veces}}$.

*c*) Demuestre que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

*d*) Encuentre $b \in \mathbb{Z}$, distinto del neutro para $\odot$ (encontrado en $(a)$) que sea invertible respecto a $\odot$.

**P2. JOTARO!**

*DIO!*

*En la épica batalla entre Jotaro y Dio,* **T H E W O R L D** *va a golpear a* **S T A R P L A T I N U M** *ante lo cual el gran Jotaro decirde calcular los golpes de* ***D I O*** *modelandolos como en el conjunto que describiremos a continuación*

Sea $G = \{w \in \mathbb{C} | \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, w^n = 1\}$.

*a*) Demuestre que $(G, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

*b*) Explique por qué la suma en $\mathbb{C}$ no es cerrada en $G$, es decir, por qué la suma no es ley de composición interna.

*c*) Para anular los golpes de DIO, Jotaro decide aplicar un homomorfismo conveniente tal que $F : (G, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo de grupos.
Demuestre que $F(w) = 0, \forall w \in G$, y que por consiguiente, Jotaro logra contrarrestar los golpes de su enemigo.

**P3. UN MOMENTO! PROTESTO! TOMA YA!**

*a*) Demuestre que si $z$ es raíz ene-ésima de la unidad ($n \geq 2$) y $n$ es divisor de $m$, entonces $z$ es raíz eme-ésima de la unidad.

*b*) Encuentre los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación:

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

*c*) Si $z_1$ y $z_2$ son soluciones de la ecuación:

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

Demuestre (sin usar inducción) que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{(\cot(\theta) + z_1 - 1)^n - (\cot(\theta) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \operatorname{sen}(n\theta)(\operatorname{cosec}(\theta))^n$$

**P4. COMBO FINAL**

*Su puño cerrado avanzó y me reventó la nariz*

Considere los números reales $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \cdot \alpha)$ y $S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sen}(k \cdot \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

*a*) Probar la igualdad de números complejos:

$$S + iS' = (1 + \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))^n$$

*b*) Escriba el número complejo $1 + \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)$ en forma polar, y de ello deduzca que:

$$S = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

$$S' = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

# Cálculo

**Nota:** Las preguntas 1 y 2 tienen el mismo tratamiento de cálculo de límites. De hacerse en la tutoría se hará sólo UNA de ellas, pero en la pauta estarán ambas. c: Escojan sabiamente entre las 2 facciones

**P1. Alliance: Stormwind**

*a*) Estudie la existencia de los límites de funciones que se enumeran a continuación.

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+3x+1\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}{x}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln(x)}}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)-\operatorname{arc\,sen}(a)}{x-a}$
**Indicación:** Calcule dicho límite en función de $a$, utilizando el cambio de variables $u=\operatorname{arc\,sen}(x)-\operatorname{arc\,sen}(a)$. Puede serle útil usar el seno de una suma.

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{1+x^2}\right]$

*b*) Para algún valor de $k$ el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}+x^2-1)(\cos(x)-1)}{x^k}$$

Existe, es finito y distinto de cero. Determinar el valor de $k$ que permite lo anterior y el valor del límite asociado.

**P2. Horde: Orgrimmar**

Considere $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\operatorname{sen}(x)-bx\cos(x)}{x} & \text{si } x<0\\ c & \text{si } x=0\\ \dfrac{\tan(b\operatorname{sen}(x))}{x} & \text{si } 0<x<\pi\\ d & \text{si } x=\pi\\ \dfrac{\sqrt{(x-\pi)^2+1}-\sqrt{(a+1)\cdot(x-\pi)+1}}{x-\pi} & \text{si } x>\pi\end{cases}$$

Determinar el valor de las constantes $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ de modo que $f$ sea continua en 0 y $\pi$.

**P3. ¿Sueñan los mechones con pautas eléctricas?**

*a*) Demuestre que si una función $f$ satisface la propiedad:

$$\exists L>0,\forall x_1,x_2\in\mathbb{R},|f(x_1)-f(x_2)|\leq L|x_1-x_2|$$

entonces, para todo $x_0\in\mathbb{R}$ se cumple que:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

tomando $x_1$, $x_2$ adecuados y utilizando la definición. Verifique además que $f(x)=x$ satisface la propiedad, pero $f(x)=x^2$ no.

*b*) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1^+ \text{ y } \lim_{u \to 1^+} f(u) = +\infty$$

Demuestre que

$$\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x) = +\infty$$

*c*) Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Pruebe, usando la definición de límite de funciones, que $\lim_{x \to 0} g(x)$ no existe.

**P4. Un duelo de Espadas oblicuas**

Determine la asíntota oblicua hacia $+\infty$ de la función $f(x) = x^{2/3} \sqrt[3]{x-1}$.