Pauta Tutoría Bailable  C6 DIM 21/06/2019

[Álgebra] Grupos, anillos, cuerpos y complejos.

P1 ¿Qué nos dice Banjo Kazooie?

Nosotros: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Banjo Kazooie niggas: $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ con $\oplus, \odot$ definidos $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} a \oplus b = a + b + 1 \\ a \odot b = a + b + ab \end{cases}$

ⓐ Buscamos $u \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \odot u = u \odot a = a$. Entonces.

$$\left.\begin{array}{lll} a \odot u = a & \Rightarrow \cancel{a} + u + au = \cancel{a} \Rightarrow u(1+a) = 0 & \Rightarrow u = 0 \\ u \odot a = a & \Rightarrow u + \cancel{a} + ua = \cancel{a} \Rightarrow u(1+a) = 0 & \Rightarrow u = 0 \end{array}\right\}$$ se cumple. Luego $u = 0$ es neutro para $\odot$.

ⓑ Buscamos ver que $\exists f$ tal que $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, \oplus)$ y $f : (\mathbb{Z}, \cdot) \to (\mathbb{Z}, \odot)$ son isomorfismos.

O... dicho de otra forma, $\exists f$ tal que $f : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ lo es (isomorfismo)

Notemos que, de haber isomorfismo, la imagen del neutro multiplicativo en $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ DEBE ser el neutro en $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

$$\Rightarrow f(1) = u = 0 \qquad (\text{de ⓐ})$$

Además: $f(n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indicación}}}{=} f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1) \oplus f(1) \oplus \ldots \oplus f(1) = \underbrace{0 \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0}_{n \text{ ceros}}$

Notemos que:

$$\begin{array}{ll} (2 \text{ ceros}) & 0 \oplus 0 = 0 + 0 + 1 = 1 \\ (3 \text{ ceros}) & (0 \oplus 0) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1 + 0 + 1 = 2 \\ (4 \text{ ceros}) & (0 \oplus 0) \oplus (0 \oplus 0) = 1 \oplus 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \\ \circ\circ\circ & \\ (n \text{ ceros}) & 0 \oplus 0 \oplus \ldots \oplus 0 = \underline{n - 1} \end{array}$$

Sigue que el isomorfismo es $f(n) = n - 1$, lo cual se verifica porque $n - 1$ es una función lineal en $\mathbb{Z}$.

- Inyectiva: Sean n_1, n_2 tales que $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 - \cancel{1} = n_2 - \cancel{1} \Rightarrow n_1 = n_2$
- Sobreyectiva: $\forall n \in \mathbb{Z}$, tomemos $m = n + 1$ tal que $f(m) = f(n+1) = (n+1) - 1 = n$.

} f es biyectiva.

- Morfismo: sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$f(a) \oplus f(b) = (a-1) \oplus (b-1) = a - \cancel{1} + b - 1 + \cancel{1} = a + b - 1 = f(a+b). \checkmark$$

$$\begin{aligned} f(a) \odot f(b) = (a-1) \odot (b-1) &= a - 1 + b - 1 + (a-1)(b-1) \\ &= \cancel{a} + \cancel{b} - 2 + ab - \cancel{a} - \cancel{b} + 1 \\ &= ab - 1 \\ &= f(a \cdot b). \checkmark \end{aligned}$$

ⓒ Buscamos probar que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo con unidad. Existen 2 formas de verificarlo.

- [Rápida] Como $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es anillo conmutativo con unidad, por el isomorfismo de ⓑ se heredan todas las propiedades, haciendo que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ fuera anillo conmutativo con unidad, con

$$f(0) = -1 \qquad\qquad f(1) = 0.$$

- [Lenta] Demostraremos cada propiedad

$\boxed{A}$ $(\mathbb{Z}, \oplus)$ es grupo abeliano:

$\oplus$ Asociativa: $(a \oplus b) \oplus c = (a + b + 1) \oplus c = a + b + 1 + c + 1 = a + (b \oplus c) + 1 = a \oplus (b \oplus c)$

$\oplus$ Conmutativa. $a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$.

Neutro: $a \oplus e = a \Rightarrow \cancel{a} + e + 1 = \cancel{a} \Rightarrow e = -1$ (cero en $\mathbb{Z}, \oplus, \odot$)

Inversa: $a \oplus a' = e \Rightarrow a + a' + 1 = -1 \Rightarrow a' = -2 - a$.

$\odot$ Asociativa: $(a \odot b) \odot c = (a + b + ab) \odot c = a + \underline{b} + ab + \underline{c} + ac + \underline{bc} + abc = a + b + c + a(b + c + bc)$

$= a \odot (b + c + bc)$

$= a \odot (b \odot c)$.

$\odot$ Distribuye c/r a $\oplus$: $a \odot (b \oplus c) = a \odot (b+c+1)$

$$= a + b + c + 1 + a(b+c+1)$$
$$= a + b + ab + a + c + ac + 1$$
$$= (a \odot b) + (a \odot c) + 1$$
$$= (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Con lo que se tiene que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es anillo. Además:

$\boxed{B}$ $\odot$ Conmuta: $a \odot b = a + b + ab = b + a + ba = b \odot a$

$\odot$ Tiene unidad (de $\odot$): $u = 0$.

Luego, $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo con unidad.

d Buscamos $b \neq 0$ que sea invertible c/r a $\odot$. Hay dos formas de proceder:

$\boxed{A}$ Usamos el isomorfismo: el único invertible en $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ distinto de la unidad es la imagen de -1 (que es el único invertible en $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$):

$$f(-1) = -1 - 1 = -2.$$

$\boxed{B}$ Calculamos directamente.

Si $s' \in \mathbb{Z}$ es inverso de $s \in \mathbb{Z}$: $s \odot s' = u \Rightarrow s + s' + ss' = 0 \quad (u = 0)$

$$\Rightarrow s' = \frac{-s}{s+1}.$$

Pero... $s' \in \mathbb{Z}$. Luego, sigue que $\boxed{s = -2}$

P2 El ataque de DIO es mediante $G = \{ w \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tq } w^n = 1 \}$.

a Buscamos probar que $(G, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Veamos primero que $G \neq \emptyset$, puesto que al menos $1 \in G$ $(1^n = 1)$.

Usaremos la propiedad compacta, es decir, pdq $\forall w_1, w_2 \in G$, $w_1 \cdot w_2^{-1} \in G$.

$w_1 \in G \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tq } w_1^{n_1} = 1$

$w_2 \in G \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tq } w_2^{n_2} = 1 \Rightarrow (w_2^{n_2})^{-1} = 1^{-1} = 1.$

$$\Rightarrow (\underbrace{w_2 \cdot \dots \cdot w_2}_{n_2 \text{ veces}})^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow (w_2^{-1})^{n_2} = 1.$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N = n_1 \cdot n_2$. Así:

$$(w_1 \cdot w_2^{-1})^N = (w_1 w_2^{-1})^{n_1 \cdot n_2} = w_1^{n_1 \cdot n_2} \cdot (w_2^{-1})^{n_1 \cdot n_2} = (w_1^{n_1})^{n_2} ((w_2^{-1})^{n_2})^{n_1}$$
$$= 1^{n_2} \cdot 1^{n_1}$$
$$= 1.$$

Es decir, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $(w_1 \cdot w_2^{-1})^N = 1 \Rightarrow w_1 \cdot$

b Notemos, sin embargo, que la suma en $\mathbb{C}$ NO es cerrada en G.

Tomemos $w_1 = 1$ $(1^2 = 1)$ y $w_2 = -1$ $((-1)^2 = 1)$. Es decir, $w_1, w_2 \in G$.

Sin embargo, $w_1 + w_2 = 1 + (-1) = 0 \notin G$ (porque $\forall n \neq 0,\ 0^n \neq 1$)
Sigue que $+$ NO es LCI en G y así la suma no es cerrada en G.

ⓒ Ahora Jobro contraataca! Con un morfismo $F : (G, \circ) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$.
Veamos que $\forall w \in G$, $F(w) = 0$. ¿Qué dice el morfismo?

$$\forall w_1, w_2 \in G, \quad F(w_1 \cdot w_2) = F(w_1) + F(w_2)$$

Además $w^n = \underbrace{w \cdot \ldots \cdot w}_{n \text{ veces}} \implies F(w^n) = F(1)$ (ya que $w \in G \Rightarrow w^n = 1$)

$\implies n \cdot F(w) = F(1)$

y 1 es neutro en $(G, \circ)$

$\implies F(1) = 0 =$ neutro de $(\mathbb{Z}, +)$.

Sigue que $n \cdot F(w) = 0$
$\implies F(w) = 0 \quad \forall w \in G$.

$\boxed{\text{P3}}$ Aquí hay demostraciones varias y otras vainas.

ⓐ z es raíz n-ésima de la unidad $[n \geq 2]$, con n divisor de m.
Probemos que z es raíz m-ésima de la unidad

z es raíz n-ésima de la unidad, es decir, $z^n = 1$.
como n es divisor de m, entonces $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $m = k \cdot n$.

Entonces: $z^m \underset{n|m}{=} z^{k \cdot n} = (z^n)^k \underset{\text{raíz}}{=} 1^k = 1$.

Luego z es raíz m-ésima de la unidad

ⓑ Buscamos $n \in \mathbb{N}$ tales que resuelven

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

En primer lugar tenemos el complejo $z_1 = \dfrac{\sqrt{3} - i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(\dfrac{-1}{2}\right) i$.

con $r_1 = |z_1| = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{4}{4}} = 1$.

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \implies \varphi_1 = \frac{-\pi}{6}$$

y además tenemos $z_2 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i$ con $r_2 = |z_2| = 1$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \varphi_2 = \frac{\pi}{6}.$$

Luego.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = \left(e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^{2n} - \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{n\pi}{3}i} - e^{\frac{n\pi}{3}i} = i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = i\sqrt{3}$$

cos par / sen impar.

$$\Rightarrow \cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)} - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cancel{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)} - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = i\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow -2\cancel{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \cancel{i}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Sigue que $\frac{n\pi}{3} = k\pi + (-1)^k\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. $\Rightarrow n = 3k + (-1)^{k+1}$.

con $k \geq 1$

$n \in \mathbb{N}$.

ⓒ z_1 y z_2 son soluciones de $z^2 - 2z + 2 = 0$. Es decir:

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = 1+i \\ z_2 = 1-i. \end{array}$$

Buscamos probar que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$\circledast = \frac{(\mathrm{ctg}(\theta) + z_1 - 1)^n - (\mathrm{ctg}(\theta) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \mathrm{sen}(n\theta)\left(\mathrm{cosec}(\theta)\right)^n$$

Notemos que $\mathrm{ctg}(\theta) + z_1 - 1 = \mathrm{ctg}(\theta) + \cancel{1} + i - \cancel{1} = \mathrm{ctg}(\theta) + i = \frac{\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}$

$$\mathrm{ctg}(\theta) + z_2 - 1 = \mathrm{ctg}(\theta) + \cancel{1} - i - \cancel{1} = \mathrm{ctg}(\theta) - i = \frac{\cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}$$

$$z_1 - z_2 = (1+i) - (1-i) = 1 + i - 1 + i = 2i$$

Luego

$$\circledast = \frac{\left(\frac{\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}\right)^n - \left(\frac{\cos(\theta) - i\,\mathrm{sen}(\theta)}{\mathrm{sen}(\theta)}\right)^n}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\left(\frac{e^{i\theta}}{\mathrm{sen}(\theta)}\right)^n - \left(\frac{e^{-i\theta}}{\mathrm{sen}(\theta)}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2i\,\mathrm{sen}^n(\theta)}\left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2i\,\mathrm{sen}^n(\theta)}\Big(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta) - \cos(-n\theta) - i\,\mathrm{sen}(-n\theta)\Big)$$

$$= \frac{1}{2i\,\mathrm{sen}^n(\theta)}\Big(\cancel{\cos(n\theta)} + i\,\mathrm{sen}(n\theta) - \cancel{\cos(n\theta)} + i\,\mathrm{sen}(n\theta)\Big)$$

$$= \frac{\cancel{2i}\,\mathrm{sen}(n\theta)}{\cancel{2i}\,\mathrm{sen}^n(\theta)}$$

$$= \left(\mathrm{cosec}(\theta)\right)^n \cdot \mathrm{sen}(n\theta)$$

P4 Sean $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{sen}(k\alpha)$

ⓐ Probemos que $S + iS' = (1 + \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))^n$

Reescribimos:

$$S + iS = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\alpha) + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{sen}(k\alpha)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\cos(k\alpha) + i\,\mathrm{sen}(k\alpha)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\alpha} \qquad \text{y} \quad e^{ik\alpha} = (e^{i\alpha})^k.$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{i\alpha})^k \cdot 1^{n-k}$$

$$= \left(e^{i\alpha} + 1\right)^n$$

$$= \left(1 + \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)\right)^n.$$

ⓑ Buscamos probar que $S = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$ y $S' = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$

Para ello escribiremos $1 + \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)$ en forma polar

$$1 + \cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha) = 1 + \cos\left(2\tfrac{\alpha}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(2\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 1 + \cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) + 2i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) + 2i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

Así:

$$(1+\cos(\alpha)+i\,\text{sen}(\alpha))^n = \left[2\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}\right]^n$$
$$= 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{in\alpha}{2}}$$
$$= 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)\right]$$
$$= 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)+i\cdot 2^n\cos^n\,\text{sen}\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right).$$

Por igualdad de complejos, si $W = a+bi$, $Z = c+di$ y $W=Z$, entonces $\begin{matrix}a=c\\ b=d.\end{matrix}$

Sigue que
$$S = 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)$$
$$S' = 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)_{//}$$

[Cálculo] Límites de funciones.

$\boxed{\text{P1}}$

ⓐ ¿Existen estos límites?

1) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+3x+1\right)\cdot\text{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}+3x+1\right)\text{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

generamos el $\frac{1}{x}$ para el límite conocido

$$= \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\sqrt{\cancel{\tfrac{1}{x^2}}+1}+3+\cancel{\tfrac{1}{x}}\right)}_{\longrightarrow 3}\underbrace{\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}_{\longrightarrow 1}$$
$$= 3\cdot 1$$
$$= 4_{//}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(5x)-\text{sen}(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 5\cdot\frac{\text{sen}(5x)}{5x} - \lim_{x\to 0} 3\cdot\frac{\text{sen}(3x)}{3x}$$

se forma el límite conocido!

$$= 5\cdot 1 - 3\cdot 1$$
$$= 2.$$

3) $$\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln(x)}}$$ Tenemos 2 formas.

① Definición de $\ln(x)$.

$$\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 1}\exp\left(\ln\left(x^{-\frac{x}{\ln(x)}}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\exp\left(-\frac{x}{\cancel{\ln(x)}}\cdot\cancel{\ln(x)}\right)$$
$$\overset{\ln(x)\neq 0}{=} \lim_{x\to 1}\exp(-x)$$
$$= e^{-1}.$$

(2) Notemos que

$$\ln\left(x^{-\frac{x}{\ln(x)}}\right) = -\frac{x}{\cancel{\ln(x)}}\cancel{\ln(x)} = -x$$

Luego

$$y = \lim_{x\to1} \ln\left(x^{\frac{-x}{\ln(x)}}\right) = \lim_{x\to1} -x = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1} x^{\frac{-x}{\ln(x)}} = \exp\left(\lim_{x\to1} \ln\left(x^{\frac{-x}{\ln(x)}}\right)\right) = e^{-1}$$

4) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{arcsen}(x)-\operatorname{arcsen}(a)}{x-a}$

Sea $\alpha = \operatorname{arcsen}(a)$

Usando el C.V. $u = \operatorname{arcsen}(x) - \alpha$

$\Rightarrow \operatorname{arcsen}(x) = u+\alpha$

$\Rightarrow x = \operatorname{sen}(u+\alpha)$

Como $x\to a$, $u\to 0$. Luego.

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{arcsen}(x)-\operatorname{arcsen}(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{u\to0} \frac{u}{\operatorname{sen}(u+\alpha)-a}$$

$$= \lim_{u\to0} \frac{u}{\operatorname{sen}(u)\cos(\alpha)+\cos(u)\operatorname{sen}(\alpha)-a}$$

Pero $\alpha = \operatorname{arcsen}(a)$

$\longrightarrow a = \operatorname{sen}(\alpha)$

$$= \lim_{u\to0} \frac{1}{\cos(\alpha)\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\right)}_{\to 1} + a\cdot\Big[\underbrace{\frac{\cos(u)-1}{u}}_{\to 0}\Big]}$$

$$= \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$= \sec(\alpha)$$

$$= \sec(\operatorname{arcsen}(a))$$

O... como $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\alpha)} = \sqrt{1-a^2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{arcsen}(x)-\operatorname{arcsen}(a)}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

5) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{e^{x^2}-1}.$

Notemos que $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ y con $h=x^2$: $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2}{e^{x^2}-1} = \lim_{h\to0} \frac{h}{e^h-1} = 1$

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} = -\frac{1}{2}.$

6) $\lim_{x\to 0} \left[\frac{2}{1+x^2}\right]$

Notemos que para $|x|<1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1$

$$\Rightarrow 1 < 1+x^2 < 2$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 > \left[\frac{2}{1+x^2}\right] > 1$$

Con lo que $\left[\frac{2}{1+x^2}\right] = 1 \quad \forall x \in (-1,0)\cup(0,1)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{1+x^2}\right] = 1.$$

(b) ¿Qué valor(es) de k hace(n) que este límite sea finito y no nulo?

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}+x^2-1)(\cos(x)-1)}{x^k} = ⊛$$

Reconstruimos la expresión, pensando en el límite conocido del coseno.

$$⊛ = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+x^2-1}{x^{k-2}} \cdot \frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

En donde $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Por otro lado: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+x^2-1}{x^{k-2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^{k-2}} + \frac{x^2}{x^{k-2}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^{k-2}} + \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-2}}.$

Para formar el límite conocido de la exponencial, necesariamente $x^{k-2} = x^2 \Rightarrow k-2=2 \Rightarrow \boxed{k=4}$

Y así $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1 + 1 = 2$

Finalmente $⊛ = 2\cdot -\frac{1}{2} = -1.$

P2) Definimos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\,\text{sen}(x) - xb\cos(x)}{x} & \text{si } x<0 \\ c & \text{si } x=0 \\ \frac{\text{tg}(b\,\text{sen}(x))}{x} & \text{si } 0<x<\pi \\ d & \text{si } x=\pi \\ \frac{1}{x-\pi}\left[\sqrt{(x-\pi)^2+1} - \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}\right. & \text{si } x>\pi \end{cases}$$

Recordemos que f es continua en x_0 si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y es igual a $f(x_0)$. ¿Qué valores de a,b,c,d permiten lo anterior?

$[x\to 0^-]$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{a\,\mathrm{sen}(x) - xb\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{a\,\mathrm{sen}(x)}{x}}_{a\cdot 1} - \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{\cancel{x}b\cos(x)}{\cancel{x}}}_{b\cdot 1} = a-b$

$[x\to 0^+]$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{tg}(b\,\mathrm{sen}(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}(b\,\mathrm{sen}(x))}{x\cos(b\,\mathrm{sen}(x))}\cdot\frac{b\,\mathrm{sen}(x)}{b\,\mathrm{sen}(x)}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}(b\,\mathrm{sen}(x))}{b\,\mathrm{sen}(x)}\cdot\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\cdot\frac{b}{\cos(b\,\mathrm{sen}(x))}$$

$$= 1\cdot 1\cdot\frac{b}{\cos(0)}$$

$$= b.$$

$[x\to \pi^-]$ $\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\mathrm{tg}(b\,\mathrm{sen}(x))}{x} = \frac{\mathrm{tg}(0)}{\pi} = 0.$

$[x\to \pi^+]$ $\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{(x-\pi)^2+1} - \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}}{x-\pi}\cdot\frac{\sqrt{(x-\pi)^2+1} + \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}}{\sqrt{(x-\pi)^2+1} + \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}}$

$$= \lim_{x\to\pi^+} \frac{(x-\pi)^2+\cancel{1} - (a+1)(x-\pi)-\cancel{1}}{(x-\pi)\left[\sqrt{(x-\pi)^2+1} + \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cancel{(x-\pi)}\left[\cancel{(x-\pi)} - (a+1)\right]}{\cancel{(x-\pi)}\left[\sqrt{\cancel{(x-\pi)}^2+1} + \sqrt{(a+1)\cancel{(x-\pi)}+1}\right]}$$

$$= \frac{-(a+1)}{2}.$$

Finalmente:

- f es continua en 0 si $a-b = c = b$.
- f es continua en π si $0 = d = \frac{-(a+1)}{2}$.

$\Rightarrow \boxed{d=0}$

$\Rightarrow \boxed{a=-1}$

$\Rightarrow \boxed{b=-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{c=-\frac{1}{2}}$

P3

ⓐ f satisface $\exists L>0,\ \forall x_1,x_2\in\mathbb{R},\ |f(x_1)-f(x_2)|\leq L|x_1-x_2|$

demostremos que $\forall x_0\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Sea $x_0\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. Podemos comparar x con x_0, acorde a la definición ε–δ de límite de funciones, que nos dice que

$$x\in[x_0-\delta, x_0+\delta] \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\leq\varepsilon.$$
$$(|x-x_0|\leq\delta)$$

Tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ tal que $|x - x_0| \leq \delta \iff |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{L}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq L\,|x - x_0|$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} \leq \varepsilon$$

Usamos $f(x_0)$ como $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$! Luego $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

¿Qué ocurre con $f(x) = x$? Tomemos $L = 1$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \underset{(=)}{\leq} 1 \cdot |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

¿Qué ocurre con $f(x) = x^2$? Supongamos que $\exists L > 0$ tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Con $x_1 = L + 1$ y $x_2 = 0$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(L+1)^2| = L^2 + 2L + 1 > L^2 + L = L(L+1) = L|x_1 - x_2|.$$

Lo que es una contradicción.

(b) Se cumple:

① $\lim_{x \to 0} g(x) = 1^+ \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\} \quad g(x) \in (1, 1+\varepsilon]$

② $\lim_{u \to 1^+} f(u) = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists \bar{\delta} > 0 \ \forall u \in (1, 1+\bar{\delta}] \quad f(u) \geq M$

Queremos demostrar que $\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x) = +\infty$, es decir,

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\} \quad (f \circ g)(x) \geq M$$

Sea $M > 0$.

- Por ② existe $\bar{\delta} > 0$ tal que $f(u) \geq M$.
- Según ①, podemos tomar $\varepsilon = \bar{\delta}$ para el cual $\exists \delta > 0$ tal que
  $$\forall x \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\} \quad \underbrace{g(x)}_{u} \in (1, 1+\varepsilon] \Rightarrow f(g(x)) \geq M$$

Se cumple así que $\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x) = +\infty$.

(c) Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Probemos que $\lim_{x \to 0} g(x)$ NO existe. Para ello, debemos tomar $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ tal que $g(x_n) \to l_1$, $g(y_n) \to l_2$ y $l_1 \neq l_2$.

Sea $X_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $X_n \to 0$ y $g(X_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $Y_n = \frac{\sqrt{a}}{n} \in \mathbb{I}$ con $a \neq k^2$, $k \in \mathbb{N}$. $\left(\text{ej } \frac{\sqrt{2}}{n}.\right)$ tal que $Y_n \to 0$ y $g(Y_n) = 1 \quad \forall n \in$

Pero $g(X_n) \neq g(Y_n)$. luego NO existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$\boxed{P4}$ Sea $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x-1}$ y buscamos su asíntota oblicua $y = mx + n$ con

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad y \quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx.$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} x\left[x^{-\frac{1}{3}} \sqrt[3]{x-1} - 1\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left[\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^{\frac{1}{3}}} - 1\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left[\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} - 1\right] = ⊛$$

El problema se puede aplicar usando L'Hôpital... pero no pueden usarlo acá !!
Sin embargo, hay una herramienta adicional. Hay una raíz cúbica! lo que nos sugiere:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Sea $a = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$ y $b = 1$. Así:

$$\underbrace{\left(\frac{x-1}{x} - 1\right)}_{\frac{x-1-x}{x}} = \left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} - 1\right)\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + 1\right)$$

luego:

$$⊛ = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x} \cdot -\frac{1}{\cancel{x}}}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + 1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\left(1-\cancel{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{1-\cancel{\frac{1}{x}}} + 1} = -\frac{1}{3}.$$

Dado que $m = 1$ y $n = -\frac{1}{3}$ la asíntota pedida es

$$y = x - \frac{1}{3}.$$