Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 2018-1

Examen

P1. Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{e^{(x^2)} - 1} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

i) (0,5 pts.) Determine $A = Dom(f)$. es decir el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $f(x)$ está definida.

ii) (2,0 pts.) Determine ceros y signos de f.

iii) (2,0 pts.) Calcule, si es que existen $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$. Concluya si hay asíntotas verticales y si las hay, identifíquelas.

iv) (1,5 pts.) Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ e indique su existen asíntotas.

P2. **a)** Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$ y $P = (x_0, y_0)$, con $y_0 \neq 0$, un punto de ella.

i) (1,5 pts.) Derivando implícitamente demuestre que la pendiente de la recta tangente en $P = (x_0, y_0)$ es $m = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$.

ii) (1,5 pts.) Usando que $P = (x_0, y_0)$ es un punto de la hipérbola, deduzca que la ecuación de la recta tangente es

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

b) Sea $g(x) = e^{(x^2)}$.

i) (1,5 pts.) Demuestre que $g'(x) = 2xg(x)$ y úselo para probar que

$$g^{(n+1)}(x) = 2(ng^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x)).$$

Indicación: Use fórmula de Leibnitz.

ii) (1,5 pts.) Determine una fórmula para $g^{(n+1)}(0)$ y calcule el polinomio de Taylor de orden 6 para g en torno a $x_0 = 0$.

P3. **a)** (3,0 pts.) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} & x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es derivable en 0 y calcule $f'(0)$.

b) Derive las siguientes funciones

i) (1,0 pt.) $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

ii) (1,0 pt.) $g(x) = \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}}$.

iii) (1,0 pt.) $h(x) = (x\ln(x))^x$.

Justifique claramente cada una de sus respuestas.

Tiempo: 3:00 hrs.