Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 2018-1

Examen

P1. Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{e^{(x^2)} - 1} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x + x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

i) (0,5 pts.) Determine $A = Dom(f)$, es decir el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $f(x)$ está definida.

ii) (2,0 pts.) Determine ceros y signos de f.

iii) (2,0 pts.) Calcule, si es que existen $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to -2} f(x)$. Concluya si hay asíntotas verticales y si las hay, identifíquelas.

iv) (1,5 pts.) Calcule $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e indique su existen asíntotas.

P2. a) Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$ y $P = (x_0, y_0)$, con $y_0 \neq 0$, un punto de ella.

i) (1,5 pts.) Derivando implícitamente demuestre que la pendiente de la recta tangente en $P = (x_0, y_0)$ es $m = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$.

ii) (1,5 pts.) Usando que $P = (x_0, y_0)$ es un punto de la hipérbola, deduzca que la ecuación de la recta tangente es

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

b) Sea $g(x) = e^{(x^2)}$.

i) (1,5 pts.) Demuestre que $g'(x) = 2xg(x)$ y úselo para probar que

$$g^{(n+1)}(x) = 2(ng^{(n-1)}(x) + xg^{(n)}(x)).$$

Indicación: Use fórmula de Leibnitz.

ii) (1,5 pts.) Determine una fórmula para $g^{(n+1)}(0)$ y calcule el polinomio de Taylor de orden 6 para g en torno a $x_0 = 0$.

P3. a) (3,0 pts.) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} & x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que f es derivable en 0 y calcule $f'(0)$.

b) Derive las siguientes funciones

i) (1,0 pt.) $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

ii) (1,0 pt.) $g(x) = \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}}$.

iii) (1,0 pt.) $h(x) = (x\ln(x))^x$.

Justifique claramente cada una de sus respuestas.

Tiempo: 3:00 hrs.

MA1001 — Introducción al Cálculo

Pauta Examen - Semestre Otoño 2018

P1 Se define $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} & \text{si } x>0 \\[2ex] \dfrac{x^2-x}{2x+x^2} & \text{si } x<0 \end{cases}$$

(i) Buscamos $A = \mathrm{dom}(f)$, para ello:

$[x>0]$: Notemos que $e^{x^2}-1=0$ ssi $x^2=0 \Rightarrow x=0$ (que está fuera del rango).

$[x<0]$: Notemos que $2x+x^2=0$ ssi $x(2+x)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=-2$.

Así, f NO está definida en -2 y 0. Luego $A = \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ — **0,5 pts**

(ii) Buscamos ceros y signos de f.

$\boxed{\text{Ceros}}$ Para $x>0$ $f(x)=0$ ssi $\cos(x)-1=0 \Rightarrow \cos(x)=1 \Rightarrow x=2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$, $k\neq 0$ — **0,5 pts**

Para $x<0$ $f(x)=0$ ssi $x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=1$. Pero ambos son positivos, luego NO hay ceros en $\mathbb{R}^-$ — **0,5 pts**

$[\text{Signos}]$ Para $x>0$ notemos que $\cos(x)-1\leq 0$, $e^{x^2}-1\geq 0$ con lo que $\dfrac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1}\leq 0$ en $\mathbb{R}^+$.

Para $x<0$ podemos factorizar: $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x(2+x)} \underset{x\neq 0}{=} \dfrac{x-1}{2+x}$. El valor $x-1$ es siempre <0, y el valor $2+x$ es >0 para $x>-2$ y <0 para $x<-2$. Luego, $f(x)>0$ si $x\in(-\infty,-2)$, $f(x)<0$ si $x\in(-2,0)$ — **0,5 pts**

Concluyendo: $f(x)>0$ si $x\in(-\infty,-2)$, $f(x)<0$ si $x\in(-2,+\infty)\setminus\{0\}$ — **0,5 pts**

(iii) Se busca ver la existencia de:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$: Estudiaremos los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{1/x^2}{1/x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left\{\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right\}}{\left\{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right\}} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$ — **1,0 pto**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{2x+x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(2+x)} \underset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{2+x} = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Luego $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe, vale $\dfrac{-1}{2}$ y $x=0$ NO es asíntota vertical. — **0,5 pts**

- $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x-1)}{x(2+x)} \underset{x\neq 0}{=} \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-1}{2+x} = \begin{matrix} +\infty & \text{hacia } 2^- \\ -\infty & \text{hacia } 2^+ \end{matrix} \Rightarrow x=-2$ ES asíntota vertical — **0,5 pts**

(iv) Buscamos:

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\overbrace{\cos(x)-1}^{\text{acotada}}}{\underbrace{e^{x^2}-1}_{\to\infty}} = 0 \Rightarrow y=0$ es asíntota horizontal — **0,7 pts**

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}(2+x)} \underset{\cdot 1/x}{\overset{\cdot 1/x}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}+1} = 1 \Rightarrow y=1$ es asíntota horizontal — **0,8 pts**

P2 ⓐ Se tiene la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a>b>0$. Se tiene también un punto $P(x_0,y_0)$ de la hipérbola $y_0\neq 0$

ⓘ Se busca demostrar que la pendiente de la recta tangente en $P(x_0,y_0)$ es $m=\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$. Derivando implícitamente: $\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{x}{a^2}=\frac{yy'}{b^2} \Rightarrow y'=\frac{xb^2}{ya^2}$ y evaluando: $\boxed{y'=\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}}$ 1,5 pts

ⓘⓘ Ahora se busca demostrar que la ecuación de la recta tangente a $P(x_0,y_0)$ es $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

La ecuación de la recta dado un punto y su pendiente es $y-y_0=\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}(x-x_0)$.

Reordenando: $a^2yy_0-a^2y_0^2=b^2xx_0-b^2x_0^2$.

Como P pertenece a la parábola, satisface:

$$\boxed{\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Rightarrow x_0^2b^2-y_0^2a^2=a^2b^2}$$ 0,5 pts

Reemplazando adecuadamente: $a^2yy_0-b^2xx_0=a^2y_0^2-b^2x_0^2=-a^2b^2$.

$$\Rightarrow b^2xx_0-a^2yy_0=a^2b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1}$$ 1,0 pto

ⓑ Sea $g(x)=e^{x^2}$

ⓘ Demostremos que $g'(x)=2xg(x)$. Para ello: $\boxed{g'(x)=e^{x^2}\cdot(x^2)'=2xe^{x^2}=2xg(x)}$ 0,5 pts

Ahora, se busca ver que $g^{(n+1)}(x)=2\left(ng^{(n-1)}(x)+xg^{(n)}(x)\right)$.

Usando Leibnitz se tiene que, primero, $g^{(n+1)}(x)=(g'(x))^{(n)}$, y luego:

$$[g'(x)]^{(n)}\underset{(i)}{=}[2xg(x)]^{(n)} \Rightarrow \boxed{g^{(n+1)}(x)=2\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}g^{(n-k)}(x)}$$

Notar que $x^{(k)}=0$ si $k\geq 2$.

$$=2\cdot\left[\binom{n}{0}x^{(0)}g^{(n-0)}(x)+\binom{n}{1}x^{(1)}g^{(n-1)}(x)\right]$$

$$=\boxed{2\cdot[xg^{(n)}(x)+ng^{(n-1)}(x)]}$$ 1,0 pto

ⓘⓘ Ahora se necesita una fórmula para $g^{(n+1)}(0)$, notando que, al evaluar, se tiene $\boxed{g^{(n+1)}(0)=2ng^{(n-1)}(0)}$ 0,5 pts

Se busca el polinomio de Taylor de orden 6 en torno a 0. Notemos que

$$g(0)=e^0=1 \qquad g'(0)=2\cdot 0\cdot g(0)=0$$

Y de acuerdo a la fórmula:

$$\boxed{\begin{aligned} g''(0)&=2\cdot 1\cdot g(0)=2\\ g'''(0)&=g^{V}(0)=0\\ g^{IV}(0)&=2\cdot 3\cdot g''(0)=6\cdot 2=12\\ g^{VI}(0)&=2\cdot 5\cdot g^{IV}(0)=10\cdot 12=120\end{aligned}}$$ 0,5 pts

⚠ $2=2!$
$12=2\cdot 3!$
$120=5!$

Así, el polinomio es

$$P(x)=g(0)+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g^{IV}(0)}{4!}x^4+\frac{g^{VI}(0)}{6!}$$

$$\boxed{P(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}}$$ 0,5 pts

P3 a) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} & x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Demostrar que f es derivable en 0 es lo mismo que verificar la existencia del límite

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$ **0,5 pts**

Calculemos: $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{\operatorname{sen}(h)} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h)-h}{h\operatorname{sen}(h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)-h}{h^2\operatorname{sen}(h)}$ (*) **0,5 pts**

Como $\begin{matrix} \operatorname{sen}(h) - h \to 0 \\ h^2 \operatorname{sen}(h) \to 0 \end{matrix}$ cuando $h \to 0$, se puede usar L'Hôpital:

(*) $\overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{2h\operatorname{sen}(h) + h^2\cos(h)}$ y de acá se puede proceder de 2 maneras:

① Ajuste a límites conocidos. Multiplicando por $1/h^2$ en ambas partes

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cos(h)-1}{h^2}}{\frac{2\cancel{h}\operatorname{sen}(h)}{h^{\cancel{2}}} + \cos(h)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2+1} = -\frac{1}{6}.$$ **2,0 pts**

② Aplicaciones de L'Hôpital:

$$f'(0) \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{2\operatorname{sen}(h) + 2h\cos(h) + 2h\cos(h) - h^2\operatorname{sen}(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{2\operatorname{sen}(h) + 4h\cos(h) - h^2\operatorname{sen}(h)}$$

$$\underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{h\to 0} \frac{-\cos(h)}{2\cos(h) + 4\cos(h) - \cancel{4h\operatorname{sen}(h)} - \cancel{2h\operatorname{sen}(h)} - \cancel{h^2\cos(h)}} = -\frac{1}{6}.$$ **2,0 pts**

Así, $f'(0)$ existe y vale $-\frac{1}{6}$.

b) Derivamos.

① $f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{-2}{x^3}$

$$= 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$ **1,0 pto**

(ii) $g(x) = \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}}} \cdot \frac{-nx^{n-1}(1+x^n) - (1-x^n)nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^n}{1-x^n}} \cdot \frac{nx^{n-1}(-1-\cancel{x^n}-1+\cancel{x^n})}{(1+x^n)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^n}{1-x^n}} \cdot \frac{-2nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$ **1,0 pto**

(iii) $h(x) = (x\ln(x))^x = \exp(x\ln(x\ln(x)))$

$$\Rightarrow h'(x) = \underbrace{\exp(x\ln(x\ln(x)))}\left[\ln(x\ln(x)) + \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}\ln x}(\ln(x)+1)\right]$$

$$= (x\ln(x))^x\left[\ln(x\ln(x)) + 1 + \frac{1}{\ln(x)}\right]$$ **1,0 pto**