

MA1001-3 Introducción al Cálculo**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Patricio Yáñez Alarcón.**Consultas:** pyanez@dim.uchile.cl

Actividad

30 de Junio de 2019

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln [(n+1)!]}{\ln [(n+1)^n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln [(n+2)!] - \ln [(n+1)!]}{\ln [(n+2)^{n+1}] - \ln [(n+1)^n]}$$

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{\ln(x^n) - \ln(a^n)} = \frac{0}{0}$$

2.

Estudie y calcule límite , L'hôpital?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \cos(x)}{x} \right) =$$

Instrucciones: Este examen consta de varias preguntas con diferente puntaje cada una. Al contestar correctamente todas las preguntas obtendrá 18 puntos con lo cual sacará un 7.0. Si contesta correctamente sólo algunas preguntas (o partes) y obtiene N puntos, su nota en el examen será $N_{Ex} = \frac{N}{18} * 6 + 1 = \frac{N}{3} + 1$

P1) (2 pts.) Considere la función $f(x) = (x^3 + x)x^4 + 3x$.

- a) Escriba el polinomio de Taylor de orden 3 de f en torno a $x_0 = 0$.
 b) Indique el valor de $f^{(7)}(0)$ (séptima derivada).

P2) (2 pts.) Calcular, si es que existen, los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen } x}{x} - 1}{\cos x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} (1 + x^2)$

P3) (2 pts.) Determine la asíntota oblicua hacia $-\infty$ de la función $f(x) = x \text{senh}(a + \frac{1}{x})$.

P4) (2 pts.) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x + 1$ que tienen pendiente igual a 9.

P5) (3 pts.) Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida mediante la recurrencia

$a_0 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \ln(a_n + 1)$

- a) Usando inducción, demuestre que la sucesión está bien definida $\forall n \in \mathbb{N}$.
 b) Demuestre que la sucesión es decreciente.
 c) Concluya que la sucesión es convergente, escriba la ecuación que satisface el límite y encuéntralo.

P6) (3 pts.) Considere la parábola $y^2 = 4px$ y los puntos $A(0, 0)$, $B(2p, 0)$ donde $p > 0$.

Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la parábola, diferente del vértice, y sea L la recta tangente a la parábola por P .

- a) (1 pto.) Demuestre que L tiene ecuación $y_0 y = 2p(x + x_0)$.
 b) (2 pts.) Calcule las distancias d_A y d_B desde A y B a la recta L y demuestre que

$$d_B^2 - d_A^2 = 4p^2.$$

Indicación: La distancia desde (α, β) a la recta $ax + by + c = 0$ vale $\frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

P7) (2 pts.) Sea $f(x) = x^2 + x - 2$. Determine paridad, ceros, signos y gráfico de la función $g(x) = f(|x|)$.

P8) (2 pts.) Considere los conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} \leq 0\right\}$ y $B = \left\{\frac{k+1}{|k|} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$

Determine, si es que existen, ínfimo, supremo, mínimo y máximo de A y B .



Examen

P1. Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \ln \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right)$$

Se pide:

- (2 pts.) Determinar: $A = \text{Dom}(f)$, el conjunto imagen, paridad, signos de f y sus ceros si es que existen.
- (1 pts.) Calcular el $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e interprete sus resultados.
- (1 pts.) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función f .
- (2 pts.) Calcular la derivada de f , es decir, $f'(x)$, bosquejar el gráfico de f y de las rectas tangentes a su gráfico en los puntos $x_0 = 2$ y $x_0 = -2$ indicando sus pendientes.

P2. Considere la función $g(x)$ definida por $g(x) = e^{1/x} \sqrt{x(x+2)}$

- (1.0 pts) Demuestre que $g(x) > x, \forall x > 0$. Justifique.
- Sea (s_n) definida por recurrencia por $s_0 = 1 \wedge s_{n+1} = g(s_n)$
 - (1.0 pts) Demuestre que (s_n) es estrictamente positiva y estrictamente creciente.
 - (1.0 pts) Demuestre que (s_n) no es acotada. (Indicación: Use contradicción)
- (3.0 pts) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ y determinar la asíntota oblicua hacia $+\infty$. (Indicación: Para realizar los cálculos use cambio de variable, y reglas de L'Hôpital.)

P3. a) (1.0 pts.) Si $r(\varphi) = \frac{1}{3} \text{tg}^3(\varphi) - \text{tg}(\varphi) + \varphi$. Demuestre que $\frac{dr}{d\varphi} = \text{tg}^4(\varphi)$.

b) (1.0 pts.) Sea $g(x) = \frac{e^x}{x}$. Demuestre que $g'(x) = -g(x) \ln(x)$.

c) (2 pts.) Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $e^{y^2-x^2} = xy - 3$ en los puntos en los que ésta intersecta a la recta $y = x$.

d) (2 pts.) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cosh(x)}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cosh(x)}$

Tiempo: 3 horas.