¿Como estudiar la inecuación cuadrática general

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c\le 0}\ ?$$

La técnica es muy simple, y es la misma que sirve para resolver la ecuación cuadrática.

Se llama completación del cuadrado del binomio, es decir, se trata de usar la identidad

$$(x+m)^2 = x^2+2mx+m^2$$

La idea aquí es formar el cuadrado $(x+m)^2$ a partir de sus partes. Identificar en la cuadrática general los elementos que forman este cuadrado.

En vez de x^2 aparece ax^2 lo que se resuelve fácilmente, factorizando por a

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right)$$

Ahora, el término que contiene x debería ser $2mx$ pero es $\frac{b}{a}x$. Esto nos permite identificar a m. En efecto, $m=\frac{b}{2a}$.

Finalmente, ¿dónde esta m^2? No lo vamos a encontrar pues no está. El término $\frac{b^2}{4a^2}$ no aparece en la expresión. Lo hacemos aparecer, pues $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}=0$. Estas ideas, aplicadas a la expresión anterior, nos llevan a

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

Esta técnica de hacer aparecer un término de "la nada" se le dice por estos lados, ni quita ni pone (o sea, ni se le saca ni se le agrega nada a la expresión). Cariñosamente, esto que no es otra cosa que el axioma del elemento neutro, es conocido como el teorema del matemático Japonés Nikita Nippone.

Y así, teniendo todos los pedazos del binomio, y algunos sobrantes:

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

La cantidad $\Delta = b^2-4ac$ es clave para resolver la inecuación (y la ecuación), o más precisamente, su signo es clave. Se le llama discriminante de la expresión cuadrática.

Puede ser negativo, nulo o positivo (tricotomía). En cada caso, la resolución es diferente.

Caso fácil, $\Delta < 0$, o también, $\Delta = -|\Delta|$

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}\right)$$

Es decir, la expresión cuadrática es a por algo positivo. Su signo es el signo de a. Si $a > 0$, la inecuación no tiene solución. Y si $a < 0$ la solución es todo $\mathbb{R}$.

2º Caso: $\Delta > 0$, o también, $\Delta = \delta^2$, con $\delta > 0$ (es decir, $\delta = \sqrt{\Delta}$).

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right)$$

y recordamos la factorización de una diferencia de cuadrados

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b - \delta}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \delta}{2a}\right)$$

Ecuación factorizada, con 2 factores de primer orden, y puntos críticos

$$x_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \qquad y \qquad x_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Si $a > 0$ el conjunto solución es $[x_1 , \ x_2]$ y si $a < 0$ es $(-\infty, x_2] \cup [x_1 , +\infty)$

El último Caso, $\Delta = 0$, entrega dos posibilidades de solución (dependiendo nuevamente de a). Todo $\mathbb{R}$ o bien solo $\{-\frac{b}{2a}\}$.