MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Resolución Auxiliar 1: Axiomas

15 de Marzo del 2019

Hola, esto es solo una ayuda del como resolver los siguientes ejercicios, de la forma que más me acomodo al preparar la clase, pero en muchos de estos puede no ser la única forma, por lo que si tienen otra idea o el porqué de algunos pasos no duden en consultarme. Mucho éxito

P1. Usando los axiomas de cuerpo de los reales y teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes propiedades:

a) Unicidad del elemento multiplicativo

Para probar esto, supondremos la existencia de dos elementos neutros distintos, llamémoslos e_1 y e_2. Lo único que se sabe es que $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que (1) $xe_1 = x$ y (2) $xe_2 = x$, entonces considerando $x = e_2$ en la ecuación (1) y $x = e_1$ en la ecuación (2), se obtiene: $e_1e_2 = e_1$ y $e_2e_1 = e_2$

$e_1 = e_1e_2$	e_2 **elemento neutro**
$e_1 = e_2e_1$	**Ax de conmutatividad**
$e_1 = e_2$	e_1 **elemento neutro**

b) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

Para probar esto necesitamos probar que:
$(-a)[-(a^{-1})] = 1$

$(-a)[-(a^{-1})] = (-1a)[-1(a^{-1})]$	**Neutro multiplitivo**
$(-a)[-(a^{-1})] = (a(-1))[-1(a^{-1})]$	**Ax Conmutatividad**
$(-a)[-(a^{-1})] = a((-1)(-1))(a^{-1})$	**Ax Asociatividad**
$(-a)[-(a^{-1})] = a(1)(a^{-1})$	(-1) **inverso de** (-1)
$(-a)[-(a^{-1})] = a(a^{-1})$	**Neutro multiplicativo**
$(-a)[-(a^{-1})] = 1$	a^{-1} **inverso de** (a)

c) $(ab) \neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, con $a, b \neq 0$

Por hipótesis de $ab = 0$ nos entrega que $a \neq 0$ y $b \neq 0$
Ahora por lo tanto por el axioma de existencia de inversos, se tiene que existen a^{-1} y b^{-1}.
Para probar esto probaremos que: $ab(a^{-1}b^{-1}) = 1$

$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(ba^{-1})b^{-1}$	**Ax Asociatividad**
$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(a^{-1}b)b^{-1}$	**Ax Conmutatividad**
$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1})$	**Ax Asociatividad**
$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (1)(1)$	**Inversos de** a y b
$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$	**Elemento Neutro**

P2. Usando sólo los axiomas de los números reales y teoremas de unicidad de neutros e inversos:
i) Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a + b = 1$, entonces el inverso multiplicativo de ab es $a^{-1} + b^{-1}$.

Para probar esto probaremos que: $ab(a^{-1} + b^{-1}) = 1$

$(ab)(a^{-1} + b^{-1}) = aba^{-1} + abb^{-1}$	**Ax Distributividad**
$(ab)(a^{-1} + b^{-1}) = (ab)a^{-1} + (a)1$	b^{-1} **inverso de** b **y Ax Asociatividad**
$(ab)(a^{-1} + b^{-1}) = b(aa^{1}) + (a)1$	**Ax Conmutatividad y Ax Asociatividad**
$(ab)(a^{-1} + b^{-1}) = b + a$	a^{-1} **inverso de** a **y 1 neutro**
$(ab)(a^{-1} + b^{-1}) = a + b$	**Ax Conmutatividad**
$(ab)(a^{-1} + b^{-1}) = 1$	**Hipótesis**

ii) Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $b, c \neq 0$, entonces:

$$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = 1$$

$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = ab^{-1}[(bc)(ac + b)^{-1}] + c^{-1}[(bc)(ac + b)^{-1}]$	**Ax Distributividad**
$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = a(b^{-1}b)c(ac + b)^{-1} + c^{-1}(bc)(ac + b)^{-1}$	**Ax Asociatividad**
$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = a(b^{-1}b)c(ac + b)^{-1} + c^{-1}(cb)(ac + b)^{-1}$	**Ax Conmutatividad**
$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = a(b^{-1}b)c(ac + b)^{-1} + (c^{-1}c)b(ac + b)^{-1}$	**Ax Asociatividad**
$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = ac(ac + b)^{-1} + b(ac + b)^{-1}$	**Inversos y Neutro**
$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = (ac + b)(ac + b)^{-1}$	**Ax Distributividad**
$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = 1$	**Inverso de** $ac + b$

P3. Sea C un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades (axiomas):
(A1): $2 \in C$
(A2): Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$
(A3): Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$
(A4): $3 \notin C$

Demuestre las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o los recién mencionados.

(a) $9 \in C$

Usando el **(A2)**, se tiene que:
$2 \in C$, entonces $7 \in C$.
Ahora usando el axioma 3:
2 y $7 \in C$, entonces $9 \in C$

(b) $1 \notin C$

Este ejercicio se resolverá por contradicción
Supongamos que $1 \in C$, como $1 \in C$ usando el axioma 3:
$2, 3 \in C$, entonces $3 \in C$, lo que es una contradicción, por lo tanto $1 \notin C$
Observación: la idea aquí es contradecir $3 \notin C$, pues es el único axioma que nos entrega información de que algo no este en el conjunto.

(c) Si $x \in C$, entonces $2x \in C$

Basta con usar el axioma 3, solo para x
$x, x \in C$, entonces $x + x = 2x \in C$

(d) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 1 + 3y \in C$

Este ejercicio, en lo personal lo encuentro menos directo de como usar los axiomas, por lo que recomiendo previamente trabajar el termino $3x + 1 + 3y$ en una hoja aparte para armarse de alguna idea.
Luego de un rato pueden percatarse de $3x + 1 + 3y = 3(x + y) + 1$, utilizando axiomas de los reales.
Con esta idea usaremos primero el axioma 3:

$x, y \in C$, entonces $x + y \in C$, luego usando el axioma 2:
$x + y \in C$, entonces $3(x + y) + 1 \in C$, ahora usando el Ax de Distributividad:
$3x + 3y + 1 \in C$ y ahora el de conmutatividad:
$3x + 1 + 3y \in C$

(e) Si $x \in C$, entonces $-x \notin C$

Este ejercicio se resolverá de manera similar al b), supongamos que $-x \in C$, entonces usando el axioma 2:
$x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$, ahora usando el axioma 3:
$3x + 1, -x \in C$, entonces $3x + 1 + (-x) = 2x + 1 \in C$, usando el axioma 3:
$2x + 1, -x \in C$, entonces $2x + 1 + (-x) = x + 1 \in C$, ahora usando el axioma 3:
$x + 1, -x \in C$, entonces $x + 1 + (-x) = 1 \in C$, lo que es una contradicción y por ende $-x \notin C$

P4. Usando propiedades fundamentales de los números reales, demuestre que para todo x, y, w y $z \in \mathbb{R}$, tal que $w \neq 0$ y $z \neq 0$ lo siguiente es verdadero

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \lambda w, y = \lambda z$$

Para ello note en primer lugar que la igualdad del lado izquierdo permite deducir que $x^2z^2 + y^2w^2 = 2xwyz$, luego vea que esto ultimo implica que $xz = yw$.
Finalmente de la igualdad anterior deduzca la conclusión.

En este ejercicio seguiremos los pasos indicados, para lo primero recordemos que la hipótesis nos dice que la igualdad es cierta, por lo que la podemos trabajar por ambos lados, al mismo tiempo.

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2), \text{ usando cuadrado de binomio y Ax de Distributividad}$$
$$x^2w^2 + 2xywz + y^2z^2 = x^2(w^2 + z^2) + y^2(w^2 + z^2) \text{ usando Ax de distributividad}$$
$$x^2w^2 + 2xywz + y^2z^2 = x^2w^2 + x^2z^2 + y^2w^2 + y^2z^2, \text{ sumando inversos a ambos lados}$$
$$(-x^2w^2) + x^2w^2 + 2xywz + y^2z^2 + (-y^2z^2) = (-x^2w^2) + x^2w^2 + x^2z^2 + y^2w^2 + y^2z^2 + (-y^2z^2), \text{ inversos}$$
$$2xywz = x^2z^2 + y^2w^2$$

Ahora para obtener la igualdad:

$$2xywz = x^2z^2 + y^2w^2 \iff 0 = x^2z^2 + y^2w^2 - 2xwyz \iff (xz - yw)^2 = 0$$

Con esto, ya que $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$, se concluye que: $xz - yw = 0 \iff xz = yw \iff w^{-1}x = z^{-1}y$
Ahora como $x = (z^{-1}y)w$, $y = (w^{-1}x)z$ y considerando $\lambda = z^{-1}y = w^{-1}x$, se concluye.