MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Pauta Auxiliar 2: Axiomas de Orden

22 de Marzo del 2019

P1. Demuestre las siguientes desigualdades:

a) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^* \ (x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geqslant 9$

En este ejercicio se usara la propiedad $(\star)$
Propiedad $(\star)$
Sean $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ $\dfrac{x^2+y^2}{xy} \geqslant 2$
Para demostrar que esta propiedad es verdadera, probaremos que es equivalente a algo verdadero.

$$\frac{x^2+y^2}{xy} \geqslant 2 \iff x^2+y^2 \geqslant 2xy \iff x^2-2xy+y^2 \geqslant 0 \iff (x-y)^2 \geqslant 0 \iff V$$

Tomando el lado izquierdo y desarrollando la multiplicación:
$(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) = 1 + xy^{-1} + xz^{-1} + yx^{-1} + 1 + yz^{-1} + zx^{-1} + zy^{-1} + 1$

$$(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) = 3 + \frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{x^2+z^2}{xz} + \frac{y^2+z^2}{yz}$$

Usando la propiedad $(\star)$
$(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geqslant 3+2+2+2 = 9$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a \neq b$ se cumple que: $a^4+b^4 > a^3b+ab^3$

Para demostrar que esto es verdadero lo llevaremos a algo equivalente que es verdadero

$$a^4+b^4 > a^3b+ab^3 \iff a^4-a^3b+b^4-ab^3 > 0 \iff a^3(a-b)-b^3(a-b) > 0 \iff (a-b)(a^3-b^3) > 0$$

Usando que $(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, que $(a-b)^2 > 0$, $a^2+ab+b^2 > 0$ y que $\mathbb{R}_+^*$ tiene el axioma de clausura:

$$a^4+b^4 > a^3b+ab^3 \iff (a-b)^2(a^2+ab+b^2) > 0 \iff V$$

P2. Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2} \geqslant 1$

Lo primero que haremos es trabajar esto para tener una expresión del estilo $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2} \geqslant 1 \iff \frac{(x^2-2x+2)-(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2} \geqslant 0 \iff \frac{x}{(x-2)(x-1)} \geqslant 0$$

Con esto tenemos que los puntos críticos son $x = \{0\}, \{1\}$ y $\{2\}$
Ahora crearemos la tabla:

	$(-\infty,0)$	(0,1)	(1,2)	(2,∞)
x	-	+	+	+
x-1	-	-	+	+
x-2	-	-	-	+
	-	+	-	+

Como el 0 es el único de los puntos críticos que satisface la inecuación, la solución es:

$S = [0,1) \cup (2,\infty)$

b) $\dfrac{22}{2x-3} + \dfrac{23x+26}{4x^2-9} > \dfrac{51}{2x+3}$

Nuevamente lo primero sera trabajar la inecuación:
$$\frac{22}{2x-3} + \frac{23x+26}{4x^2-9} > \frac{51}{2x+3} \iff \frac{22(2x+3)+(23x+26)-51(2x-3)}{4x^2-9} > 0 \iff \frac{35(x-7)}{(2x-3)(2x+3)} < 0$$

Los puntos críticos son $x = \{-\frac{3}{2}\}, \{\frac{3}{2}\}$ y $\{7\}$
Ahora crearemos la tabla:

	$(-\infty,-\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2},7)$	(7,∞)
x-7	-	-	-	+
2x-3	-	-	+	+
2x+3	-	+	+	+
	-	+	-	+

Como ningún punto critico cumple la inecuación, se tiene que la solución es:
$S = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 7)$

c) $\dfrac{4x-3}{6x} < \dfrac{8x-6}{5x}$

lo primero sera trabajar la inecuación:
$$\frac{4x-3}{6x} < \frac{8x-6}{5x} \iff \frac{5(4x-3)-6(8x-6)}{30x} < 0 \iff \frac{7(4x-3)}{30x} > 0$$

Los puntos críticos son $x = \{0\}$ y $\{\frac{3}{4}\}$
Ahora crearemos la tabla:

	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{3}{4})$	$(\frac{3}{4},\infty)$
x	-	+	+
4x-3	-	-	+
	+	-	+

Como ningún punto critico cumple la inecuación, se tiene que la solución es:
$S = (-\infty, 0) \cup (\frac{3}{4}, \infty)$

P3. Resuelva

a) $||2x-3|-4| \leqslant 2$

Como les comente en el auxiliar este ejercicio, lo resolveremos mediante el método de usar operadores lógicos:

$||2x-3|-4| \leqslant 2 \iff [(|2x-3|-4 \leqslant 2) \wedge (-2 \leqslant |2x-3|-4)] \iff [(|2x-3| \leqslant 6) \wedge (2 \leqslant |2x-3|)]$

$||2x-3|-4| \leqslant 2 \iff [([2x-3 \leqslant 6] \wedge [-6 \leqslant 2x-3]) \wedge ([2 \leqslant 2x-3] \vee [2 \leqslant 3-2x])]$

$||2x-3|-4| \leqslant 2 \iff [([x \leqslant \frac{9}{2}] \wedge [-\frac{3}{2} \leqslant x]) \wedge ([\frac{5}{2} \leqslant x] \vee [x \leqslant \frac{5}{2}])]$

$||2x-3|-4| \leqslant 2 \iff [(-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}]) \wedge ([\frac{5}{2} \leqslant x] \vee [x \leqslant \frac{1}{2}])]$

$||2x-3|-4| \leqslant 2 \iff [\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{2}] \vee [-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}]]$

Finalmente $S = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$

b) $3|x+5| - 10 < 2|x-2|$

Este ejercicio y los siguientes se resolverán mediante el otro método:
Primero encontremos los puntos en los cuales los valores absolutos se hacen 0, son $x = \{-5\}$ y $\{2\}$, por lo tanto separaremos el problema en 3 casos: $i)x < -5$, $ii) -5 \leqslant x < 2$ y $iii)2 \leqslant x$:

Caso $i)x < -5$, el enunciado al reemplazar los valores absolutos es:
$3(-1)(x+5) - 10 < 2(-1)(x-2) \iff -3x - 15 - 10 < -2x + 4 \iff -29 < x$
Como este caso pide que $x < -5$, la solución es:
$S_i = (-29, -5)$

Caso $ii) -5 \leqslant x < 2$, el enunciado al reemplazar los valores absolutos es:
$3(x+5) - 10 < 2(-1)(x-2) \iff 3x + 15 - 10 < -2x + 4 \iff 5x < -1 \iff x < -\frac{1}{5}$
Como este caso pide que $-5 \leqslant x < 2$, la solución es:
$S_{ii} = \left[-5, -\frac{1}{5}\right)$

Caso $iii)2 \leqslant x$, el enunciado al reemplazar los valores absolutos es:
$3(x+5) - 10 < 2(x-2) \iff 3x + 15 - 10 < 2x - 4 \iff x < -9$
Como este caso pide que $2 \leqslant x$, la solución es:
$S_{iii} = \varnothing$

Finalmente $S = S_i \cup S_{ii} \cup S_{iii} = \left(-29, -\frac{1}{5}\right)$

c) $|x(x^2-1)| < |x + x^{-1}|$

En este caso, primero es necesario notar que el cero no puede ser solución, pues se indetermina la inecuación, por esto no se considera al final del problema.
Ahora trabajaremos la expresión para reducirla a algo mas sencillo:

$|x(x^2-1)| < |x + x^{-1}| \iff |x||x-1||x+1| < (x^2+1)|x^{-1}| \iff x^2|x-1||x+1| < x^2+1$
Observación: Pude eliminar algunos valores absolutos, pues lo de adentro era siempre positivo.
Notemos en esta expresión tenemos dos puntos en los cuales los v.a, se hacen 0, el $\{-1\}$ y el $\{1\}$, así que separaremos esto en 3 casos: $(-\infty,-1)$, $[-1,1)$ y $[1,\infty)]$.

Caso $i)x < -1$:
$x^2(-1)(x-1)(-1)(x+1) < x^2+1 \iff x^4 - 2x^2 - 1 < 0 \iff (x^2-(1+\sqrt{2}))(x^2-(1-\sqrt{2})) < 0$
El segundo término $(x^2-(1-\sqrt{2}))$ es siempre positivo estricto (preguntar si no lo ven al darle un par de vueltas), por lo que no aporta y podemos eliminarlo de la desigualdad (si fuera negativo también se podría eliminar, pero invertiría la desigualdad), por lo tanto:
$x^2|x-1||x+1| < x^2+1 \iff x^2-(1+\sqrt{2}) < 0 \iff (x+\sqrt{1+\sqrt{2}})(x-\sqrt{1+\sqrt{2}}) < 0$
Haciendo la tabla, encontraran que el intervalo en que es negativa es: $(-\sqrt{1+\sqrt{2}},\sqrt{1+\sqrt{2}})\backslash\{0\}$
NOTA: También se podría justificar que es esta zona, por ser una parábola que se va a los infinitos positivos.
Por lo tanto:
$S_{caso-i} = (-\sqrt{1+\sqrt{2}},-1)$.

Caso $ii) -1 \leqslant x < 1$
$x^2(-1)(x-1)(x+1) < x^2+1 \iff -1 < x^4 \iff V$
Por lo tanto:
$S_{caso-ii} = [-1,1) - \{0\}$, recuerden que este no puede ser solución.

Caso $iii)x \geqslant 1$:
$x^2(x-1)(x+1) < x^2+1 \iff x^4 - 2x^2 - 1 < 0 \iff (x+\sqrt{1+\sqrt{2}})(x-\sqrt{1+\sqrt{2}}) < 0$
Es lo mismo que el caso $i)$, pero como ahora $x \geqslant 1$, la solución es:
$S_{caso-iii} = [1,\sqrt{1+\sqrt{2}})$.

Finalmente $S = S_{caso-i} \cup S_{caso-ii} \cup S_{caso-iii} = (-\sqrt{1+\sqrt{2}},\sqrt{1+\sqrt{2}}) - \{0\}$

P4. Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{||x|-|x-2||}{x^2-1} \leqslant 2$$

Primero notemos que el -1 y 1 no pueden ser solución, pues x^2-1 se hace 0, así que al descartarlos podemos multiplicar por x^2-1, el único inconveniente es: ¿Qué signo tiene x^2-1?.... la respuesta es depende, si $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ es positivo y si $x \in (-1,1)$ negativo. Esto es importante, pues afecta el sentido en que apunta nuestra inecuación, por lo tanto separaremos el problema en estos dos casos, primero haremos el donde $x^2-1<0$, es decir, $x \in (-1,1)$.
Este caso es sencillo, pues:
$\dfrac{||x|-|x-2||}{x^2-1} \leqslant 2 \iff ||x|-|x-2|| \geqslant 2(x^2-1)$
Notando que lo del lado izquierdo es siempre positivo y lo del lado derecho es siempre negativo (en este caso de x), la desigualdad es verdadera y se tiene que:

$S_{caso1} = (-1,1)$
Ahora vamos al caso en que $x^2-1>0$, es decir, $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, este caso es más complicado, por lo que habrá que separarlo en subcasos, con el fin de eliminar los valores absolutos.
Observando que los valores absolutos son: $|x|$ y $|x-2|$, nos interesara cuando:
$x<0$, $0 \leqslant x < 2$ y $2 \leqslant x$
Por ende, se estudiaran los siguientes 3 subcasos:
$x<-1$, $1<x<2$ y $2 \leqslant x$
Caso $i)x<-1$
$\dfrac{||x|-|x-2||}{x^2-1} \leqslant 2 \iff \dfrac{|(-1)x-(-1)(x-2)|-2(x^2-1)}{x^2-1} \leqslant 0 \iff \dfrac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$
Haciendo la tabla obtenemos que:

	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},-1)$	(-1,1)	$(1,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},\infty)$
x-$\sqrt{2}$	-	-	-	-	+
x+$\sqrt{2}$	-	+	+	+	+
x-1	-	-	-	+	+
x+1	-	-	+	+	+
	+	-	+	-	+

Como estamos en el caso en que $x<-1$, se tiene que la solución es:
$S_{caso2-i} = (-\infty,-\sqrt{2})$
Caso $ii)1<x<2$
$\dfrac{||x|-|x-2||}{x^2-1} \leqslant 2 \iff \dfrac{|x-(-1)(x-2)|-2(x^2-1)}{x^2-1} \leqslant 0 \iff 2\dfrac{|x-1|-x^2+1}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$
$\dfrac{||x|-|x-2||}{x^2-1} \leqslant 2 \iff 2\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0 \iff 2\dfrac{x}{x+1} \geqslant 0,$ recordar que $x \neq 1$
Haciendo la tabla obtenemos que:

	$(-\infty,-1)$	(-1,0)	(0,∞)
x	-	-	+
x+1	-	+	+
	+	-	+

Como estamos en el caso en que $1 < x < 2$, se tiene que la solución es:
$S_{caso2-ii} = (1, 2)$
Caso $iii) 2 \leqslant x$
$$\frac{||x| - |x-2||}{x^2-1} \leqslant 2 \iff \frac{|x-(x-2)| - 2(x^2-1)}{x^2-1} \leqslant 0 \iff \frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0$$
Haciendo la tabla obtenemos que:

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -1)$	$(-1,1)$	$(1,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$x-\sqrt{2}$	-	-	-	-	+
$x+\sqrt{2}$	-	+	+	+	+
x-1	-	-	-	+	+
x+1	-	-	+	+	+
	+	-	+	-	+

Como estamos en el caso en que $2 \leqslant x$, se tiene que la solución es:
$S_{caso2-iii} = [2, \infty)$
$S_{caso2} = S_{caso2-i} \cup S_{caso2-ii} \cup S_{caso2-iii} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \infty)$
$S = S_{caso1} \cup S_{caso2} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

P5. Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{x(x+2)-|x+2||x-3|}{(x+1)(x-2)}<0$$

Primero notemos que los puntos en que los valores absolutos valen 0 son: $\{-2\}$ y $\{3\}$, así que tendremos 3 casos ($x<-2$, $-2\leqslant x<3$ y $3\leqslant x$)

Caso $i) x<-2$

$$\frac{x(x+2)-|x+2||x-3|}{(x+1)(x-2)}<0 \iff \frac{x(x+2)-(-1)(x+2)(-1)(x-3)}{(x+1)(x-2)}<0 \iff \frac{3(x+2)}{(x+1)(x-2)}<0$$

Ahora haciendo la tabla:

	(-$\infty,-2$)	(-2,-1)	(-1,2)	(2,∞)
x+2	-	+	+	+
x+1	-	-	+	+
x-2	-	-	-	+
	-	+	-	+

Recordando que estamos en el caso $x<-2$, la solución es:
$S_{caso-i}=(-\infty,-2)$, el -2 no sirve, pues es una desigualdad estricta
Caso $ii)-2\leqslant x<3$

$$\frac{x(x+2)-|x+2||x-3|}{(x+1)(x-2)}<0 \iff \frac{x(x+2)-(x+2)(-1)(x-3)}{(x+1)(x-2)}<0 \iff \frac{(2x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}<0$$

Ahora haciendo la tabla:

	(-$\infty,-2$)	(-2,-1)	(-1, $\frac{3}{2}$)	($\frac{3}{2}$, 2)	(2,∞)
x+2	-	+	+	+	+
x+1	-	-	+	+	+
x-2	-	-	-	-	+
2x-3	-	-	-	+	+
	+	-	+	-	+

Recordando que estamos en el caso $-2\leqslant x<3$, la solución es:
$S_{caso-ii}=(-2,-1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$, el $\frac{3}{2}$ no sirve, pues es una desigualdad estricta
Finalmente el caso $iii) x\geqslant 3$

$$\frac{x(x+2)-|x+2||x-3|}{(x+1)(x-2)}<0 \iff \frac{x(x+2)-(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-2)}<0 \iff \frac{3(x+2)}{(x+1)(x-2)}<0$$

Notemos que tiene la misma tabla que el caso $i)$, por lo tanto la solución es:

$S_{caso-iii}=\emptyset$, recordar que en este caso $x\geqslant 3$, por lo tanto la desigualdad es falsa.
$S=S_{caso-i}\cup S_{caso-ii}\cup S_{caso-iii}=(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$