MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Pauta Auxiliar 5: Cónicas

12 de Abril del 2019

P1. Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b > 0$. Demuestre que cualquier recta tangente a esta cónica determina sobre las asíntotas puntos A y B tales que $x_A x_B = \textit{constante}$ e indique el valor de la constante (x_A y x_B son las abscisas de A y B respectivamente).
Indicación: La recta tangente a la hipérbola en un punto $P = (x_0, y_0)$ de ella tiene por ecuación

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Con el centro de esta hipérbola es el origen, las asíntotas son:
$L_A : y = \frac{b}{a}x$ y $L_B : y = -\frac{b}{a}x$, para encontrar x_A y x_B interceptamos la recta tangente a la hipérbola con L_A y luego con L_B.
Con L_A nos entrega que:
$\frac{x_A x_0}{a^2} - \frac{y_A y_0}{b^2} = 1$ y $y_A = \frac{b}{a}x_A$, juntando las dos:

$$\frac{x_A x_0}{a^2} - \frac{\frac{b}{a}x_A y_0}{b^2} = 1 \iff \frac{x_A x_0}{a^2} - \frac{x_A y_0}{ab} = 1 \iff x_A = \frac{a^2 b}{x_0 b - y_0 a}$$

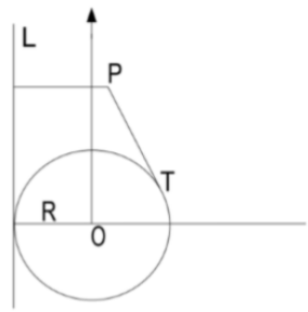
Ahora con L_B:
$\frac{x_B x_0}{a^2} - \frac{y_B y_0}{b^2} = 1$ y $y_B = -\frac{b}{a}x_B$, juntando las dos:

$$\frac{x_B x_0}{a^2} + \frac{\frac{b}{a}x_B y_0}{b^2} = 1 \iff \frac{x_B x_0}{a^2} + \frac{x_B y_0}{ab} = 1 \iff x_B = \frac{a^2 b}{x_0 b + y_0 a}$$

Ahora multiplicando se tiene que:

$$x_A x_B = \frac{a^4 b^2}{x_0^2 a^2 - y_0^2 a^2} = \frac{a^2}{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}} = a^2$$

P2. Dada la circunferencia $C : x^2 + y^2 = R^2$ y la recta $L = -R$ se pide determinar el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la distancia de P a la recta L es igual a b veces la magnitud del trazo PT tangente a la circunferencia C, con $b > 0$.



Primero notar que $PL = R + x$, por lo tanto $PT = \dfrac{R+x}{b}$.

Notemos que $OT = R$ y $OP^2 = x^2 + y^2$. Como OPT es un triángulo rectángulo, se cumple por Pitagoras:

$$OP^2 = OT^2 + PT^2 \iff x^2 + y^2 = R^2 + \frac{(R+x)^2}{b^2} \iff (b^2-1)x^2 - 2Rx + b^2y^2 = R^2(1+b^2)$$

Caso $b = 1$

$y^2 = 2R(x+R)$, lo que corresponde a una parábola.

Ahora completando cuadrados y asumiendo $b > 1$:

$$(\sqrt{b^2-1}x - \frac{R}{\sqrt{b^2-1}})^2 + b^2y^2 = R^2(1+b^2) + \frac{R^2}{b^2-1}$$

$$(b^2-1)(x - \frac{R}{b^2-1})^2 + b^2y^2 = R^2(1+b^2) + \frac{R^2}{b^2-1}$$

$$\frac{(x - \frac{R}{b^2-1})^2}{\frac{R^2(1+b^2) + \frac{R^2}{b^2-1}}{b^2-1}} + \frac{y^2}{\frac{R^2(1+b^2) + \frac{R^2}{b^2-1}}{b^2}} = 1$$

Por lo que es una elipse.

Ahora en el caso de $b < 1$

$$(\sqrt{1-b^2}x + \frac{R}{\sqrt{1-b^2}})^2 - b^2y^2 = -R^2(1+b^2) + \frac{R^2}{1-b^2}$$

$$(1-b^2)(x + \frac{R}{1-b^2})^2 - b^2y^2 = -R^2(1+b^2) + \frac{R^2}{1-b^2}$$

$$\frac{(x + \frac{R}{1-b^2})^2}{\frac{-R^2(1+b^2) + \frac{R^2}{1-b^2}}{b^2-1}} - \frac{y^2}{\frac{-R^2(1+b^2) + \frac{R^2}{1-b^2}}{b^2}} = 1$$

Por lo que es una hipérbole

P3. Dada una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y una recta $y=mx+k$. Se sabe que estas son tangentes si y sólo si se verifica:

$$k^2=m^2a^2+b^2$$

Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P=(\alpha,\beta)$ tales que las dos rectas tangentes a la elipse que pasan por P son perpendiculares

Tendremos dos rectas:
$L_1: y=m_1x+k_1$ y $L_2: y=m_2x+k_2$
Como ambas rectas son tangentes a la elipse se cumple que:
$k_1^2=m_1^2a^2+b^2$ y $k_1^2=m_1^2a^2+b^2$
y como las rectas son perpendiculares se tiene que:
$m_1m_2=-1$.
Recuerden que la forma de resolver estos ejercicios es eliminar las incógnitas de las ecuaciones y dejar solo una relación entre x e y.
De las primeras dos podemos despejar k_1 y k_2 respectivamente.
$k_1=y-m_1x$ y $k_2=y-m_2x$, ahora reemplazando en las de tangencia:
$k_1^2=y^2-2m_1xy+m_1^2x^2=m_1^2a^2+b^2$ y $k_2^2=y^2-2m_2xy+m_2^2x^2=m_2^2a^2+b^2$
Reemplazando que $m_2=\frac{-1}{m_1}$, la última ecuación cambia a:
$y^2+2\frac{xy}{m_1}+\frac{x^2}{m_1^2}=\frac{a^2}{m_1^2}+b^2$
Ahora multiplicando por m_1^2:
$y^2m_1^2+2m_1xy+x^2=a^2+m_1b^2$
Si sumamos esta ecuación en ambos lados con, $y^2-2m_1xy+m_1^2x^2=m_1^2a^2+b^2$, nos queda que:
$y^2(m_1^2+1)+x^2(m_1^2+1)=a^2(m_1^2+1)+b^2(m_1^2+1) \iff x^2+y^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2$
Lo que es una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{a^2+b^2}$

P4. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, encontrar el punto (x_0,y_0) tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0,y_0) como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima, Nota: utilice las propiedades de parábolas para determinar el máximo.

Primero notemos que el único rectángulo inscrito en la elipse con vértice (x_0,y_0) es el con vértices: (x_0,y_0), $(-x_0,-y_0)$, $(-x_0,y_0)$ y $(x_0,-y_0)$, por lo tanto su área es $A(x_0,y_0)=4x_0y_0$, ahora queremos maximizar esta función, pero como esto es una función siempre positiva, maximizar la función es equivalente a maximizar la función al cuadrado, es decir, $A(x_0,y_0)^2=16x_0^2y_0^2$, como (x_0,y_0) pertenece a la elipse, se tiene que:
$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \iff y_0^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)$, reemplazando en la función del área al cuadrado.
$A^2(x_0)=16\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)x_0^2$ y haciendo el cambio el variable $u=x_0^2$, se tiene que:
$A^2(x_0)=16\frac{b^2}{a^2}(a^2-u)u$, lo que es una parábola que en su vértice alcanza el máximo y la coordenada x de su vértice es $u=\frac{a^2}{2}$, lo que nos dice que $x_0=\sqrt{\frac{a^2}{2}}$, con esto se despeja que $y_0=\frac{b^2}{2}$.