MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 6: Funciones

18 de Abril del 2019

P1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$

a) Determine $A = Dom(f)$ y paridad.
b) Encuentre los ceros y signos de f.
c) Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento.
d) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva (calcule el recorrido).
e) Determine el mayor conjunto B, $B \subseteq A = Dom(f)$ tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.
f) Bosqueje el gráfico de f y de $|f|$.

P2. Sea $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{|x|+1}{x-1}$.

(a) Muestra que f no es inyectiva.
(b) Calcula $f^{-1}([-1,1])$.
(c) Sea $g : [0,1) \to \mathbb{R}$ denida por $g(x) = f(x)$. Demuestre que g es inyectiva.
(d) Restringe el recorrido de modo de obtener a partir de g una función biyectiva.
(e) Calcula la inversa.

P3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no idénticamente nula, tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$.

(a) Probar que $f(0) = 0$ y que $f(1) = 1$.
(b) Calcular $f(x)$, para $x \in \mathbb{N}$, luego para $x \in \mathbb{Z}$ y por último para $x \in Q$.
(c) Probar que $x \geqslant 0$ implica que $f(x) \geqslant 0$. Deducir que f es estrictamente creciente.

P4. Sea f una función de variable real denida como $f(x) = \dfrac{2x}{1-|x|}$

1. Encontrar Dominio, ceros y paridad de f
2. Determinar asíntotas horizontales y verticales de f.
3. Demostrar que $\forall y > 0$, existe $x \in (0,1)$ tal que $y = f(x)$.

Usar este resultado para deducir que f restringida al dominio $(-1,1)$ es epiyectiva en $\mathbb{R}$.

Propuestos

P1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denida por $f(x) = x^2 + \alpha$ si $x \geqslant 0$ $x + \beta$ si $x < 0$.

(a) Demuestre que f es epiyectiva ssi $\alpha \leqslant \beta$.

(b) Demuestre que f es inyectiva ssi $\alpha \geqslant \beta$.

(c) ¿Cuál es el conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \in R^2 | f \text{ biyectiva}\}$?

P2. Considere la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - |x|}$

$a)$ Encontrar dominio, ceros, paridad, signos y asíntotas de todo tipo.

$b)$ Estudiar el crecimiento de la función.

$c)$ Calcular $f((1, \infty))$ y probar que la función f restringida de $(1, \infty)$ y con codominio $f((1, \infty))$ es biyectiva y encuentre su inversa.

$d)$ Bosqueje el gráfico de f.

Recuerdos y Consejos

Dominio: es el mayor conjunto A, tal que $\forall x \in A$, $f(x)$ esta bien definido.
Codominio: es el conjunto B, en el cual, $forallx \in Dom(f)$, $f(x) \in B$.
Ceros de una función: $\{x \in Dom(f)\}$ tal que $f(x) = 0$.
Conjunto Imagen: $f(A) = \{y \in \mathbb{R} | x \in A \wedge f(x) = y\}$
Función par: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$
Función impar: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$
Monotonía de una función: f es creciente en A, si $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ y analogo el caso de decreciente.
Función inyectiva Una función se dirá inyectiva ssi $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$
Función sobreyectiva Una función se dirá sobreyectiva ssi recorrido= $Im(f)$.
Biyectiva Si se cumple que f es inyectiva y epiyectiva, se dira biyectiva.