**MA1001-9 Introducción al Cálculo**
**Profesor:** Amitai Linker
**Auxiliares:** Vicente Salinas
**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl

# Pauta Auxiliar 6: Funciones

18 de Abril del 2019

**P1.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$

*a*) Determine $A = Dom(f)$ y paridad.

Notemos que el dominio solo se ve restringido por la condición de que $1 - x^2 \geqslant 0 \iff 1 \geqslant x \geqslant -1$, para la paridad estudiaremos $f(-x)$ :
$f(-x) = |-x| - \sqrt{1-(-x)^2} = |x| - \sqrt{1-x^2} = f(x)$, por lo que es par

*b*) Encuentre los ceros y signos de $f$.

Por ser par solo trabajaremos con $x$ positivo, imponiendo $f(x) = 0 \iff x - \sqrt{1-x^2} \iff x = \sqrt{1-x^2} \iff x^2 = 1 - x^2 \iff x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
Entonces los ceros son $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ y $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ (por paridad).
Los signos los calcularemos luego de calcular el crecimiento.

*c*) Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento.

$0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1 \iff 0 \leqslant x_1^2 < x_2^2 \leqslant 1 \iff 1 \geqslant 1 - x_1^2 > 1 - x_2^2 \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \sqrt{1-x_1^2} > \sqrt{1-x_2^2} \geqslant 0 \iff 0 \leqslant 1 - \sqrt{1-x_1^2} < 1 - \sqrt{1-x_2^2} \leqslant 1 \iff f(x_1) < f(x_2)$, es creciente.
Es creciente en $[0, 1]$ y decreciente $[-1, 0)$ (por paridad).
Ahora los signos como la función crece en la parte positiva son: negativa en $\left[0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ y positiva en $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right]$.
Por ser una función par: negativa en $\left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right]$ y positiva en $\left[-1, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

*d*) Muestre que $f$ no es inyectiva ni sobreyectiva (calcule el recorrido).

Como es par, es directo que no es inyectiva, pues $f(-1) = f(1)$.
Para calcular el recorrido tenemos que el recorrido de $f$ en $[0, 1]$ es $[f(0), f(1)] = [-1, 1]$, pues la función es estrictamente creciente, por paridad en los negativos es lo mismo y como $[-1, 1] \neq \mathbb{R}$, se tiene que no es sobreyectiva.

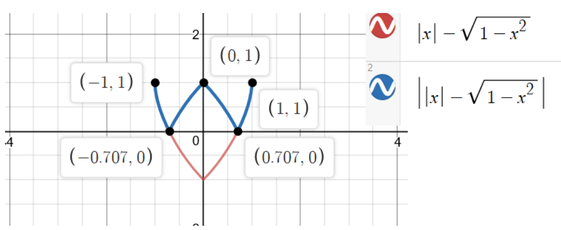
$e$) Determine el mayor conjunto $B$, $B \subseteq A = Dom(f)$ tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.

Para hacer biyectiva la función con estos conjuntos de partida y llegada, solo falta probar la inyectividad, como es par no puede tener ningún punto y su inverso aditivo, por lo tanto $B \subseteq [0,1]$ y como en este intervalo es estrictamente creciente, se tiene que es inyectiva, por lo que es biyectiva.
Para calcular la inversa hay que despejar el $x$ de la ecuación $y = f(x) \iff y = x - \sqrt{1-x^2} \iff$ $(y-x)^2 = 1 - x^2 \iff y^2 \iff 2x^2 - 2xy + \frac{y^2}{2} = 1 - \frac{y^2}{2} \iff \left(\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{y^2}{2}$

$y = f(x) \iff \left|\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{1-\frac{y^2}{2}} \iff \sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}} = \sqrt{1-\frac{y^2}{2}} \iff x = \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{1-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2}}$

Con lo que tenemos que $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}}$.
**Obs** Cuando se elimino el valor absoluto, se envalúo en algún punto $(x, y = f(X))$ para saber como era.

$f$) Bosqueje el gráfico de $f$ y de $|f|$.




**P2.** Sea $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{|x|+1}{x-1}$.
($a$) Muestra que $f$ no es inyectiva.

Primero notar que cuando $x < 0$, se tiene que:
$f(x) = \frac{-x+1}{x-1} = -\frac{x-1}{x-1} = -1$, por lo que no es inyectiva, pues $f(-2019) = f(-3{,}14) = -1$.
También notamos que para el caso de $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

($b$) Calcula $f^{-1}([-1,1])$.

Ahora nos piden la preimagen del intervalo $[-1,1]$, como no conocemos los valores que toma $f(x)$ para $x$ positivo, estudiaremos su crecimiento, esto se separara en dos casos cuando $0 \leqslant x_1 < x_2 < 1$ y cuando $1 < x_1 < x_2$.
Caso $0 \leqslant x_1 < x_2 < 1$:
$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2+1}{x_2-1} - \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{2(x_1-x_2)}{(x_2-1)(x_1-1)} < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, decreciente. Por lo tanto $f((0,1)) = (-\infty, -1)$
Caso $1 < x_1 < x_2$:
$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2+1}{x_2-1} - \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{2(x_1-x_2)}{(x_2-1)(x_1-1)} < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, decreciente. Por lo tanto $f((1,\infty)) = (1,\infty)$.
Por lo tanto: $f^{-1}([-1,1]) = f^{-1}(\{-1\}) = (-\infty, 0]$

($c$) Sea $g : [0, 1) \to \mathbb{R}$ denida por $g(x) = f(x)$. Demuestre que $g$ es inyectiva.

Por lo recién probado sobre el decrecimiento estricto de $f$ en ese intervalo se tiene que es inyectiva.

($d$) Restringe el recorrido de modo de obtener a partir de g una función biyectiva.

Como sabemos que el recorrido es $(-\infty, -1]$, se tiene que:
$g : [0, 1) \to (-\infty, -1]$ es biyectiva.

($e$) Calcula la inversa.

Resolviendo la ecuación:
$y = \dfrac{x+1}{x-1} \iff xy - y = x + 1 \iff x(y-1) = y + 1 \iff x = \dfrac{y+1}{y-1}$.
Por lo tanto $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

**P3.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no idénticamente nula, tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(xy) = f(x)f(y)$.

($a$) Probar que $f(0) = 0$ y que $f(1) = 1$.

$f(0) = f(0) + f(0) \iff 0 = f(0)$
$f(1) = f(1)^2 \iff f(1)(1 - f(1)) = 0 \iff f(1) = 0 \vee f(1) = 1$.
Si $f(1) = 0$, se tiene que $f(x) = f(x)f(1) = 0$, por lo tanto $f(1) = 1$, pues $f$ no es idénticamente nula.

($b$) Calcular $f(x)$, para $x \in \mathbb{N}$, luego para $x \in \mathbb{Z}$ y por último para $x \in Q$.

Sabemos que $f(1) = 1$ y $f(2) = f(1) + f(1) = 2$, por lo tanto la idea es $f(n) = n$, para probar esto usaremos inducción.
Caso base $f(1) = 1$, está listo.
Supongamos que $f(n-1) = n - 1$ y queremos probar que $f(n) = n$.
$f(n) = f(n-1) + f(1) = n - 1 + 1 = n$.
Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$ .
Ahora para calcular $f(z)$ con $z \in \mathbb{Z}$, solo falta calcular los $f(-n)$, con $\in \mathbb{N}$. Notando que:
$0 = f(0) = f(n) + f(-n) \iff -f(n) = f(-n) \iff -n = f(-n)$, por lo tanto se tiene que:
$z \in \mathbb{Z}$, $f(z)z$.
Sea $\dfrac{p}{q} \in Q$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, notando que:
$f(p) = f\left(\dfrac{p}{q}\right) f(q) \iff p = f\left(\dfrac{p}{q}\right) q \iff \dfrac{p}{q} = f\left(\dfrac{p}{q}\right)$

($c$) Probar que $x \geqslant 0$ implica que $f(x) \geqslant 0$. Deducir que $f$ es estrictamente creciente.

Para probar lo primero, como $x \geqslant 0$, podemos escribirlo convenientemente como $z^2 = x \geqslant 0$, por lo tanto: $f(x) = f(z^2) = f(z)^2 \geqslant 0$.
Con esta propiedad no es suficiente para concluir que es estrictamente creciente, solo se puede concluir que es creciente. Para concluir lo otro usaremos una versión mas fuerte, que es que $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$. Para probar, por lo anterior solo falta el caso de que si $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$:
Si $x \neq 0$, se tiene que existe $x^{-1}$ y $1 = f(1) = f(x)f(x^{-1}) \Rightarrow f(x) \neq 0$, con lo que se concluye la propiedad:
Ahora sea $x_1 < x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2 - x_1) > 0 \iff f(x_2) - f(x_1) > 0 \iff f(x_2) > f(x_1)$, por lo que es estrictamente creciente.

**P4.** Sea $f$ una función de variable real denida como $f(x) = \dfrac{2x}{1-|x|}$

1. Encontrar Dominio, ceros y paridad de $f$

Para el dominio basta notar que $f$ solo presenta problemas cuando $1 - |x| = 0 \iff x = \{-1, 1\}$, por lo tanto el $Dom(f) = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$

Para encontrar los ceros impongamos $f(x) = 0 \iff \dfrac{2x}{1-|x|} = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$

Para la paridad estudiaremos $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{1-|-x|} = -\dfrac{2x}{1-|x|} = -f(x)$, por lo que es impar

2. Determinar asíntotas horizontales y verticales de $f$.

Para las asíntotas verticales basta con ver los puntos donde el denominador se anula, en este caso $x = 1$ y $x = -1$ seran las asíntotas verticales.

Para el caso de las horizontales hay que estudiar su comportamiento hacia los infinitos, estudiaremos solo hacia el infinito positivo y el otro lo argumentaremos por la imparidad de la función.

Cuando tiende al infinito, como los grados de los términos mayores son iguales la función tiende a $\dfrac{2}{1} = 2$, por lo tanto las asíntotas horizontales son $y = 2$ e $y = -2$ (por imparidad al menos infinito).

3. Demostrar que $\forall y > 0$, existe $x \in (0, 1)$ tal que $y = f(x)$.

Usar este resultado para deducir que $f$ restringida al dominio $(-1, 1)$ es epiyectiva en $\mathbb{R}$.

Pueden resolver esto probando que la función es creciente, en 0 vale 0 y cuando se acerca a 1 se acerca a $\infty$.

Pero para variar lo probare de la siguiente forma:

Queremos encontrar para cualquier $y$ un $x$ tal que $f(x) = y$.

La idea es despajar $x$ de la ecuación $y = f(x)$.

$y = \dfrac{2x}{1-x} \iff y - xy = 2x \iff x(y+2) = y \iff x = \dfrac{y}{y+2}$.

Ahora tenemos que para cualquier $y > 0$, se tiene que $\dfrac{y}{y+2} \in (0, 1)$ $f\left(\dfrac{y}{y+2}\right) = y$. $f$ restringida a $[0, 1)$ tiene recorrido $[0, \infty)$ y por ser impar $f$ restringida a $(-1, 1)$ tiene recorrido $\mathbb{R}$.