MA1001 Introducción al Cálculo
Profesor: Vicente Salinas
Auxiliar: Patricio Yañez

Algunas respuestas e ideas de la Tutoría C2

18 de Abril del 2019

P1. Sea $f(x) = 6x^2 - x - 5$. Determine paridad, ceros, crecimiento, inyectividad, sobreyectividad y cuando corresponda, la inversa de las siguientes funciones:

a) $g(x) = f(x+1)$

$6(x+1)^2 - (x+1) - 5 = 6x^2 + 12x + 6 - x - 1 - 5 = 6x^2 + 11x = x(6x+11)$
$f(-x) = (-x)(-6x+11) = x(6x-11)$, pareciera ser ni par ni impar, por lo que buscaremos un contra ejemplo:
$f(1) = 17$ y $f(-1) = -5$, por lo que no tiene paridad.
Sus ceros son $x = 0$ y $x = -11/6$
Al ser una parábola se tiene que es decreciente en $(-\infty, -11/12)$ y creciente $(-11/12, \infty)$.
No es inyectiva, pues $f(-11/6) = f(0) = 0$
No es sobreyectiva, pues el recorrido es $[f(-11/12), \infty) = [-121/24, \infty)$ (alcanza su mínimo en el vértice)

b) $g(x) = f(|x|)$

$g(x) = 6x^2 + x - 1$, si $x < 0$ o $g(x) = 6x^2 - x - 1$ si $x \geqslant 0$ Es par pues $g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$
Sus ceros son $x = \dfrac{1}{2}$ y por paridad $x = -\dfrac{1}{2}$
Si solo estudiamos para $x \geqslant 0$ se tiene que de $[0, 1/12)$ decrecece y de $(1/12, \infty)$ crece, por lo tanto por paridad de $(-\infty, -1/12)$ decrece y de $(-1/12, 0)$ crece.
No es inyectiva, pues $f(-1/2) = f(1/2) = 0$
No es sobreyectiva, pues el recorrido es $[f(1/12), \infty) = [-25/24, \infty)$ (alcanza su mínimo en el vértice y es par).

c) $g(x) = f(x+1) - f(|x|)$

$g(x) = 6x^2 + 11x - 6x^2 - x + 1 = 10x + 1$, si $x < 0$ y $g(x) = 6x^2 + 11x - 6x^2 + x + 1 = 12x + 1$, si $x \geqslant 0$.
no es ni par ni impar, pues $f(1) = 13$ y $f(-1) = -9$
Su único 0 es $x = -\dfrac{1}{10}$
La función es siempre creciente.
Es inyectiva, pues si $x_1 \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x_1) < 1$ y si $x_2 \in (0, \infty) \Rightarrow f(x_2) > 1$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Si $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 10x_1 + 1 = 10x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.
Análogamente $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 12x_1 + 1 = 12x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$.
Es sobreyectiva, pues su recorrido es $\mathbb{R}$. (es estrictamenente creciente desde menos infinito a infinito).
Su inversa es $g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{10}$ si $x < 1$ y $g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{12}$ si $x \geqslant 1$ (se obtienen despejando x en cada caso).

P2. Considere los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (-a, 0)$, donde $a > 0$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ tal que las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} satisfacen la siguiente relación

$$m_{PA} = \frac{2m_{PB}}{1 - m_{PB}^2}$$

Notemos que $m_{PA} = \dfrac{y}{x-a}$ y $m_{PB} = \dfrac{y}{x+a}$, por lo tanto reemplazando:
$\dfrac{y}{x-a} = \dfrac{2\dfrac{y}{x+a}}{1 - \dfrac{y^2}{(x+a)^2}} \iff 1 = \dfrac{2\dfrac{(x-a)}{x+a}}{1 - \dfrac{y^2}{(x+a)^2}} \iff \dfrac{(x+a)^2 - y^2}{(x+a)^2} = 2\dfrac{(x-a)}{x+a} \iff (x+a)^2 - y^2 =$
$2(x^2 - a^2) \iff 4a^2 = x^2 - 2xa + a^2 + y^2 \iff (2a)^2 = (x-a)^2 + y^2$
Es una circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio $2a$.

P3. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denida por $f(x) = x^2 + \alpha$ si $x \geqslant 0$ $x + \beta$ si $x < 0$
(a) Demuestre que f es epiyectiva ssi $\alpha \leqslant \beta$.

El recorrido de f, cuando $x \geqslant 0$ es $[\alpha, \infty)$ y el recorrido cuando $x < 0$ es $(-\infty, \beta)$, por lo tanto su recorrido es $(-\infty, \beta) \cup [\alpha, \infty)$. Así que esto es igual a $\mathbb{R} \iff a \leqslant b$.

(b) Demuestre que f es inyectiva ssi $\alpha \geqslant \beta$.

(Primero probaremos esta implicancia ¡=) Por la parte anterior tenemos que si $alpha \geqslant \beta$, los recorridos son disjuntos, por lo tanto si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ o $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ y como en cualquiera de los casos se tiene que la función es inyectiva. Se concluye que es inyectiva.
Para la otra implicancia (se hará por contradicción) supongamos que la función es inyectiva y $\alpha < \beta$, entonces tenemos que existe un punto en común que pertenece a ambos recorridos y no proviene del mismo x, lo que es una contracción, pues la función era inyectiva.

(c) ¿Cuál es el conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \in R^2 | f \text{ biyectiva}\}$?

Como la función tiene que cumplir que es inyectiva y sobreyectiva a la vez, se tiene que $B = \{(\alpha, \beta) | \alpha = \beta\} = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$