Considere $\frac{x}{x^2-|x|}$.

a) Dom

$x^2-|x| \neq 0$

Si $x>0$

$\Rightarrow x^2-x \neq 0$

$x(x-1) \neq 0$

$x=\phi \wedge x \neq 1$

o

Si $x<0$

$x^2+x \neq 0$

$x(x+1) \neq 0$

$x \neq 0 \wedge x \neq -1$

$\Rightarrow \mathrm{Dom}f\, \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

Zeros $f(x)=0 = \frac{x}{x^2-|x|} \iff x=0$, $x=0 \notin \mathrm{Dom}(f)$

$\Rightarrow \boxed{Z(f) = \phi}$

Paridad $f(x)=f(-x)$ Par?

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-|-x|} = \frac{-x}{x^2-|x|} \neq f(x)$; $|x|=|-x|, \forall x \in \mathbb{R}$

$-f(x)=f(x)$ Impar $\quad -f(-x) = -\left(\frac{-x}{(-x)^2-|-x|}\right) = \frac{x}{x^2-|x|} = f(x)$

$\therefore f(x)$ es IMPAR

Com Impar solo trabajaremos $\mathbb{R}^+ \cap Dom(f)$

Signos

$$\frac{x}{x^2-|x|} = \frac{x}{x^2-x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)}$$

Cambios de signo

$x=0$

$x=1$

$\Leftarrow x \neq 0$

$$= \frac{1}{x-1}$$

	$-\infty$	0	1	∞
x	$-$	$+$	$+$	
x	$-$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$+$	
	$-$	$-$	$+$	

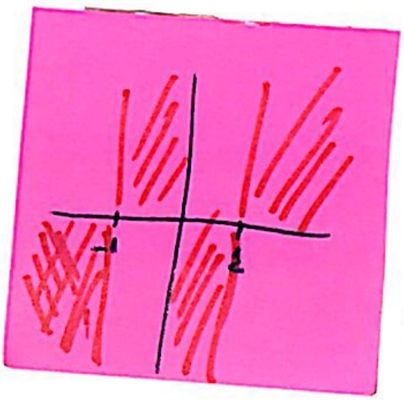
si $x \in (0,1)$ $f(x) < 0$

si $x \in (1,\infty)$ $f(x) > 0$

Ahora como $f(x)$ impar

si $x \in (-1,0)$ $f(x) > 0$

si $x \in (-\infty,-1)$ $f(x) < 0$



$\in f(x)$.

Asíntotas

Vertical $x=1$, $x=-1$, $x=0$ Indet.

- Si $x \in \mathbb{R}^+ \cap Dom(f)$

$\frac{1}{x-1}$ si $x \to \infty \Rightarrow f(x) \to 0 \Rightarrow y=0$ Asíntota

Crecimiento.

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ si $x \in \mathbb{R}^+ \cap Dom(f)$ $\quad \underline{x_1 < x_2}$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2-1} - \frac{1}{x_1-1} = \frac{x_1 - \cancel{1} - x_2 + \cancel{1}}{(x_2-1)(x_1-1)} = \frac{x_1 - x_2}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

si $x \in (0,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1-1)(x_2-1)} = \frac{-}{(-)(-)} = \frac{-}{+} = -$$

$\Rightarrow$ si $x \in (0,1)$ $f(x) \downarrow$

si $x \in$ (1,∞)

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1-1)(x_2-1)} = \frac{-}{(+)(+)} = \frac{-}{+} = -$$

$\Rightarrow f(x) \downarrow$ si $x \in (1, \infty)$

IMPAR $\Rightarrow$ si $x \in (-1, 0) \Rightarrow f(x) \downarrow$

si $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f(x) \downarrow$

Scanned with CamScanner

c) $f((1,\infty))$

Restringo

$$f: (1,\infty) \to f((1,\infty)) = (0,\infty) = \text{Cod.} = \text{Rec.}$$
$$x \to \frac{1}{x-1}$$

La función por def es sobreyectiva

$$\forall y \in f(1,\infty) = (0,\infty), \exists x \in (1,\infty) \mid f(x) = y$$

$$\text{Rec}(f) = \text{Cod}(f)$$

Inyectividad

$$\frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1} \Rightarrow x_2 - 1 = x_1 - 1 \Rightarrow x_2 = x_1$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$\therefore f(x)$ Inyectiva

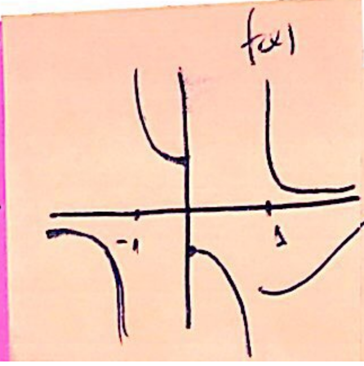
$\Rightarrow f(x)$ Biyectiva

Inversa. $\Leftrightarrow$ Biyectiva

$$y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow yx - y = 1 \Rightarrow y = \frac{1+x}{x}\ ; \ x \neq 0$$

$$x = \frac{1+y}{y}$$

Cambio x por y !



si $x \in (0,\infty)$
$f(x) = \frac{1}{x-1}$
si $x \in (-\infty,0)$
$f(x) = \frac{1}{x+1}$

P6

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

$f(x) = f(y)$

$\Rightarrow x^2 = y^2$

$\Rightarrow x = \pm y \Rightarrow$ No inyectiva

Luego $y = x^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{y}$, $y \geq 0$

$Rec(f) = [0, \infty+) \neq \mathbb{R}$

$Rec \neq Cod$

$\Rightarrow$ No sobreyectiva

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

$\underbrace{\sqrt{x^2+1}}$ $\Rightarrow Dom(g) = \mathbb{R}$

$x^2 \geq 0 \;/+1$

$x^2+1 \geq 1 \geq 0$ //

Luego $f(x) = f(y) \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1} \;/()^2$

$\Rightarrow x^2+1 = y^2+1$

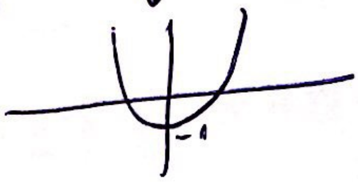
$\Rightarrow x^2 = y^2$

$\Rightarrow x = \pm y$ $\therefore$ No inyectiva

$(\mathbb{R}, \sigma(\mathcal{L}))$

$y = \sqrt{x^2+1}$ $\quad\Big\rangle\quad y^2 - 1 \geq 0$

$\sqrt{y^2 - 1} = x$



$y^2 - 1 = h(y)$ $\Big\langle$ $h(y) \geq 0,\ y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; $h(y) < 0,\ y \in (-1, 1)$

Pero para que la raiz
esta bien definida solo tomo $(1, \infty)$
Entonces este está el recorrido..

$$Rec(g) \neq Cod(g) = \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ No Biyectiva

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{2x^2-5x+4}$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x^2+3x-1}{2x^2-5x+4} = \frac{y^2+3y-1}{2y^2-5y+4}$$

$\Rightarrow (x^2+3x-1)(2y^2-5y+4) = (y^2+3y-1)(2x^2-5x+4$

$2x^2y^2 - 5x^2y + 4x^2 + 6xy^2 - 15yx + 12 - 2y^2 + 5y - 4$

$= 2x^2y^2 - 5y^2x + 4y^2 + 6yx^2 - 15xy + 12 - 2x^2 + 5x - 4$

$\Rightarrow -5x^2y + 4x^2 + 6xy^2 - 2y^2 + 5y = -5y^2x + 4y^2 + 6yx^2 - 2x^2 + 5x$

$11xy^2 - 11x^2y + 6x^2 - 6y^2 + 5y - 5x = 0$

$-11xy(x-y) + 6(x-y)(x+y) - 5(x-y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)(6(x+y) - 11xy - 5) = 0$

$6(x+y) - 11xy - 5 = 0$

$6x - 11xy = -6y + 5$

$x(6 - 11y) = -6y + 5$

$\underline{x = \dfrac{-6y+5}{6-11y}}$ || $\Rightarrow x \neq y$

$\therefore$ No inyectiva

o bien decir

$f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ Contrarecíproco

$\Leftrightarrow \underbrace{f(x_2) = f(x_1)}_{V} \Rightarrow \underbrace{x_1 \neq x_2}_{F}$

$f\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Contraejemplo, $\therefore$ No inyectiva

un número arbitrario $\in \mathbb{R}$

$\dfrac{x^2+3x-1}{2x^2-5x+4} = -1$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 1 = -2x^2 + 5x - 4$

$3x^2 - 2x + 3 = 0$

$a = 3,\ b = -2,\ c = 3$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} = \dfrac{2 \pm 4\sqrt{2}i}{6} \notin \mathbb{R}$

como no genera imagen $-1 \Rightarrow Rec \neq \mathbb{R}$ $\therefore$ No sobre.

P7) $f(x) = \dfrac{|x|-6}{|x|-2}$, $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a)

$|x|-2 \neq 0$

si $x>0 \Rightarrow x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

si $x<0 \Rightarrow -x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$\Rightarrow A = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ //

Zeros

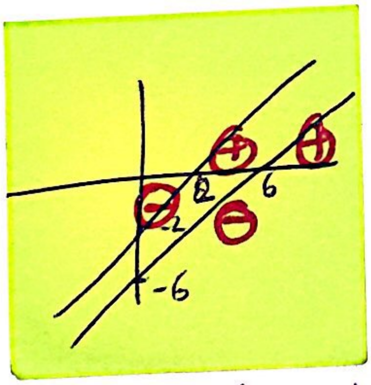
$|x|-6 = 0 \iff x = 6 \lor x = -6$

$\Rightarrow Z(f) = \{-6, 6\}$

Signos

si $x \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{x-6}{x-2}$



	$-\infty$	2	6	∞
$x-6$	$-$	$-$	$+$	
$x-2$	$-$	$+$	$+$	
	$+$	$-$	$+$	

$f(x) > 0 \iff x \in [0, 2) \cup (6, \infty+)$

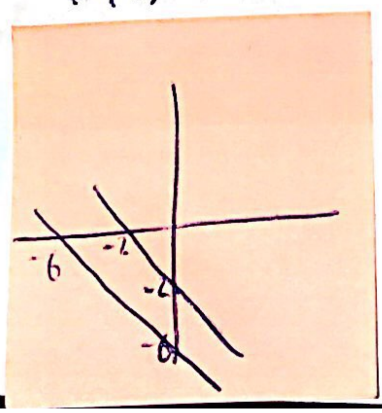
$f(x) < 0 \iff x \in (2, 6)$

Ojo donde trabajo

Luego

si $x < 0$

$\Rightarrow \dfrac{-x-6}{-x-2}$



	$-\infty$	-6	-2	$\infty+$
$-x-6$	$+$	$-$	$-$	
$-x-2$	$+$	$+$	$-$	
	$+$	$-$	$+$	

$\Rightarrow f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -6) \cup (-2, 0)$

$f(x) < 0 \iff x \in (-6, -2)$

Paridad

$$f(-x) = \frac{|-x|-6}{|-x|-2} = \frac{|x|-6}{|x|-2} = f(x)$$

$\Rightarrow$ Par

$$-f(-x) = \frac{-|-x|+6}{|x|-2} \neq f(x) \quad \text{No Impar}$$

Analizamos $x > 0$ como par ocurre lo contrario si $x < 0$.

$$f(x) = \frac{|x|-6}{|x|-2}, \quad \text{si } x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-6}{x-2}, \quad x=-2,\ x=2 \ \text{Asíntotas V.}$$

$y=1$ Asíntota H.

$f(x_2) - f(x_1)$, $x_1 < x_2$.

$$\frac{x_2-6}{x_2-2} - \frac{x_1-6}{x_1-2} = \frac{\cancel{x_1x_2} - 6x_1 - 2x_2 + \cancel{12} - \cancel{x_1x_2} + 2x_1 + 6x_2 - \cancel{12}}{(x_2-2)(x_1-2)}$$

$$= \frac{4x_2 - 4x_1}{(x_2-2)(x_1-2)} = \frac{4(x_2-x_1)}{(x_2-2)(x_1-2)}$$

si $x \in (0,2) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{+}{(-)(-)} = \frac{+}{+} = + \Rightarrow f(x) \nearrow$

si $x \in (2, \infty+) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \frac{+}{(+)(+)} = + \Rightarrow f(x) \nearrow$

Scanned with CamScanner

Como f par

$\Rightarrow$

si $x \in (-2, 0) \Rightarrow f(x) \downarrow$

si $x \in (-\infty, -2) \Rightarrow f(x) \downarrow$

- Como es par $\exists x_1, x_2 / x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Por esto no es inyectiva, en particular $|x| = |-x|$

- No es sobreyectiva

Veamos $f^{-1}(2)$

$$\frac{|x|-6}{|x|-2} = 2$$

$\Rightarrow |x| - 6 = 2|x| - 4$

$\Rightarrow |x| = -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esto no pasa

$\Rightarrow \boxed{Rec(f) \neq \mathbb{R} = \text{Codominio}}$ $\therefore$ No sobreyectiva

d) si $x \in (2, \infty+)$, $f|_B : B \to f(B)$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x-6}{x-2} = y \Rightarrow$ Biyectiva

$x - 6 = xy - 2y$

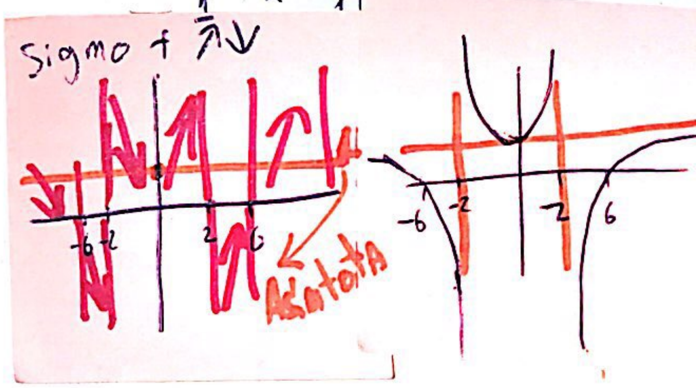
$x - xy = -2y + 6$

$x(1-y) = -2y + 6$

$x = \dfrac{-2y+6}{1-y}$

cambio

$y = f^{-1}(x) = \dfrac{-2x+6}{1-x}$ //

e) 

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl