MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Pauta Auxiliar 7: Trigonometría

27de Abril del 2019

P1. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

En clase lo hicimos con un truco, ahora lo resolveré de la misma forma que cualquier otro, partamos con el lado derecho:

$$LD = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$LD = 2\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right]$$
$$LD = 2\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) + \sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\right]$$
$$LD = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) = \sin(x) + \sin(y)$$

b) $\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

De la formula de arriba podemos reemplazar un $-y$

$$\sin(x) - \sin(y) = \sin(x) + \sin(-y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

c) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$$LD = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$LD = 2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\right]$$
$$LD = 2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2\cos\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2\sin\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]$$
$$LD = 2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2\cos\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2(1 - \cos\left(\frac{y}{2}\right)^2)\right]$$
$$LD = 2\left[\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] = 2\left[\cos\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]$$
$$LD = 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \cos\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1 - \sin\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$LD = \cos\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \cos(y) + \cos(x)$$

Obs: En la penultima linea se utilizo $\cos(z)^2 = 1 - \sin(z)^2$ y $\sin(z)^2 = 1 - \cos(z)^2$

d) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

Vamos a usar cosas probadas en c)

$$LD = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$LD = \cos(x) + \cos(y) - 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) - \cos(x) - \cos(y)$$
$$LD = 2\left(\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) - \cos(x) - \cos(y)$$
$$LD = 2\cos(x) - \cos(x) - \cos(y) = \cos(x) - \cos(y)$$

De la penúltima linea a la última, se utilizo la formula del coseno de la suma de ángulos.

e) $\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$

$$LD = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{2\tan(x)}{\sec(x)^2}$$
$$LD = 2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cos(x)^2 = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$$

f) $\cos(2x) = \frac{1 - tan(x)^2}{1+\tan(x)^2}$

$$LD = \frac{1-\tan(x)^2}{1+\tan(x)^2} = \frac{1-\tan(x)^2}{\sec(x)^2}$$
$$LD = \frac{\frac{\cos(x)^2 - sin(x)^2}{\cos(x)^2}}{\frac{1}{\cos(x)^2}} = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(2x)$$

g) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$LI = \sin(3x) = \sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x)$
$LI = 2\sin(x)\cos(x)^2 + +\sin(x)\cos(x)^2 - \sin(x)^3$
Pasando todo a senos
$LI = 2\sin(x) - 2\sin(x)^3 + \sin(x) - \sin(x)^2 - \sin(x)^3 = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$

h) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$LI = \cos(3x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$
$LI = \cos(x)^3 - \sin(x)^2\cos(x) - 2\sin(x)^2\cos(x)$
Pasando todo a cosenos
$LI = \cos(x)^3 - 3\cos(x) + 3\cos(x)^3 = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$

i) $(\operatorname{cosec} x - \cot x)^2 = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

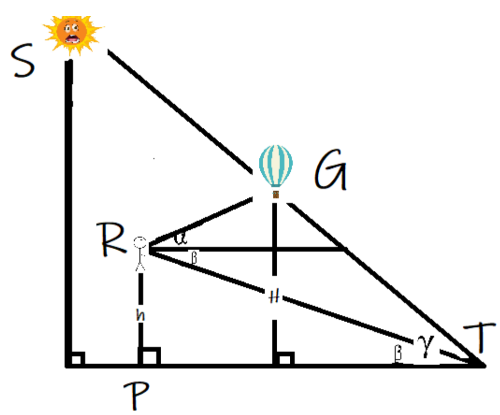
$$LI = (\operatorname{cosec} x - \cot x)^2 = \left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2 = \frac{(1-\cos(x))^2}{\sin(x)^2}$$
$$LI = \frac{(1-\cos(x))^2}{1-\cos(x)^2} = \frac{(1-\cos(x))^2}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$$

j) $\dfrac{\sec^2 x}{1+\sin x} = \dfrac{\sec^2 x - \sec x \tan x}{\cos^2 x}$

$$LD = \frac{\sec^2 x - \sec x \tan x}{\cos^2 x} = \frac{1-\sin(x)}{\cos(x)^2\cos(x)^2} = \sec(x)^2\frac{1-\sin(x)}{1-\sin(x)^2} = \frac{\sec(x)^2}{1+\sin(x)}$$

P2. Usando teoremas del seno y coseno, resuelva los siguientes problemas:

a) Una persona P ubicada en un acantilado a una altura h sobre el nivel del mar, ve un globo estático G con un ángulo de elevación α y su sombra S en el agua con un ángulo de depresión β. Si en el momento de la observación se sabe que la inclinación de los rayos solares es γ, se pide calcular la altura H del globo sobre el mar en función de α, β, γ y h.



Usando teorema del seno se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{RT}{sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{h}{sin(\beta)} \iff RT = \frac{h}{sin(\beta)}$$
$$\frac{GT}{sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{H}{sin(\gamma)} \iff H = GT\sin(\gamma)$$
$$\frac{GT}{sin(\alpha+\beta)} = \frac{RT}{sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma+\beta)} \iff GT = \frac{RT\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

En este último paso se utilizo que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$$H = GT\sin(\gamma) = \frac{RT\sin(\alpha+\beta)\sin(\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{h\sin(\alpha+\beta)\sin(\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta)}$$

b) Muestre que el triangulo Δ_{ABC} donde $\dfrac{a+c}{b} = \cot\left(\dfrac{B}{2}\right)$, cumple que A o C son ángulos rectos.

Primero utilizaremos el teorema del seno:

$\dfrac{a}{\sin(A)} = \dfrac{b}{\sin(B)} = \dfrac{c}{\sin(C)} = m \Rightarrow a = m\sin(A), b = m\sin(B), c = m\sin(C)$

$\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{m\sin(A) + m\sin(C)}{m\sin(B)} = \dfrac{\sin(A)+\sin(C)}{\sin(B)} =_{Usando(P_1)} \dfrac{2\sin(\frac{A+C}{2})\cos(\frac{A-C}{2})}{2\sin(\frac{B}{2})\cos(\frac{B}{2})}$

$\dfrac{a+c}{b} =_{Usando(A+B+C=\pi)} \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2})\cos(\frac{A-C}{2})}{\sin(\frac{B}{2})\cos(\frac{B}{2})} = \dfrac{\cos(\frac{B}{2})\cos(\frac{A-C}{2})}{\sin(\frac{B}{2})\cos(\frac{B}{2})} = \dfrac{\cos(\frac{A-C}{2})}{\sin(\frac{B}{2})}$

Pero por enunciado $\dfrac{a+c}{b} = \cot(\frac{B}{2} = \dfrac{\cos(\frac{B}{2})}{\sin(\frac{B}{2})}$, por lo tanto:

$\dfrac{\cos(\frac{B}{2})}{\sin(\frac{B}{2})} = \dfrac{\cos(\frac{A-C}{2})}{\sin(\frac{B}{2})} \Rightarrow \cos(\frac{B}{2}) = \cos(\frac{A-C}{2})$

Como el coseno es par se tienen dos posibles soluciones:

$\frac{B}{2} = \dfrac{A-C}{2}$ o $\frac{B}{2} = -\dfrac{A-C}{2}$.

La primera nos dice que: $B = A - C \Rightarrow \pi = A + B + C = A + A - C + C = 2A \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$

La segunda nos dice que: $B = C - A \Rightarrow \pi = A + B + C = A + C - A + C = 2C \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{2}$

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $(\cos(x))^3 + (\sin(x))^3 + 1 - \dfrac{1}{2}\sin(2x) = 0$

Usando que $a^3 + b^3 = (a + b(a^2 - ab + b^2))$ y $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$(\cos(x) + \sin(x)(\cos(x)^2 - (x)\sin(x) + \sin(x)^2) + 1 - \sin(x)\cos(x) = 0$

Factorizando

$(1 - \sin(x)\cos(x))(1 + \cos(x) + \sin(x)) = 0$

Notemos que el primer termino nunca es 0, pues como el seno y el coseno son siempre menores o iguales que uno su producto solo puede ser uno, cuando ambos son uno y eso nunca sucede.

Ahora para el segundo termino usaremos la siguiente idea, supongamos que tenemos un x que cumple que $\sin(x) + \cos(x) = -1$, entonces al elevar al cuadrado se tiene que:

$\sin(x)^2 + 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x)^2 = 1 \Rightarrow 2\cos(x)\sin(x) = 0$

Por lo tanto cualquier x que cumpla lo que queremos tiene que cumplir que $sin(x) = 0$ o $\cos(x) = 0$. Los ángulos que cumplen esto son: $0, \dfrac{\pi}{2}$, π y $\dfrac{3\pi}{2}$. Ahora si probamos estos valores, vemos que los únicos casos que sirven son $x = \pi$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$, por lo tanto las soluciones son:

$x = \pi + 2k\pi$ y $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

b) $\dfrac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)} = 1+\sin(2x)$

Primero trabajemos la ecuación

$$\frac{\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)}}{\frac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)}} = 1+2\sin(x)\cos(x)$$

$$\frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)} = 1+2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(x)-\sin(x) = \cos(x)+\sin(x)+2\sin(x)\cos(x)^2 2\sin(x)^2\cos(x)$$

$$0 = 2\sin(x)+2\sin(x)\cos(x)^2+2\sin(x)^2\cos(x)$$

$$0 = \sin(x)(2+2\cos(x)^2+2\sin(x)\cos(x))$$

$$0 = \sin(x)(2+1+\cos(2x)+\sin(2x)) = \sin(x)(3+\cos(2x)+\sin(2x))$$

Como $\cos(2x)+\sin(2x) \geqslant -2$, se tiene que esto solo es 0, cuando $\sin(x)=0$.
Por lo tanto, $x = k\pi$

c) $sin(2x)\cot(x)-\sin(x)^2 = \dfrac{1}{2}$

Trabajando la ecuación

$$sin(2x)\cot(x)-\sin(x)^2 = \frac{1}{2} \iff 2\sin(x)\cos(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)}-\sin(x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$2\cos(x)^2-1+\cos(x)^2 = \frac{1}{2} \iff 3\cos(x) = \frac{3}{2} \iff \cos(x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}\frac{k\pi}{2}$$

d) $\cos(x) = \dfrac{2\tan(x)}{1+\tan(x)^2}$

Usando la P_1 se tiene que:
$\cos(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \iff \cos(x)(1-2\sin(x)) = 0$
Como $\cos(x)=0$ no puede ser solución, pues la tangente se indefine, se tiene que los únicos ceros son:
$\sin(x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ y $x = \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$