MA1001-9 Introducción al Cálculo
Profesor: Amitai Linker
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 9: Axioma del supremo II y Sucesiones

10 de Mayo del 2019

P1. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, los cuales verican las siguientes propiedades:

a) $A \cup B = \mathbb{R}$.

b) Todo elemento de A es menor que todo en B.

Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. Pruebe, además, que dicho número real α es único.

P2. En este problema usted demostrar a que todo conjunto A acotado inferiormente y no vacío posee ínfimo, el cual se relaciona con el supremo de $-A$, donde $A = \{y = -x : x \in A\}$
Para ello se pide lo siguiente:
a) Considere el caso particular $A = (-1, 0] \cup [1, \infty)$. En este caso, encuentre $-A$, $\sup(-A)$ e $\inf(A)$.
b) Demuestre que si c es una cota superior arbitraria de $-A$, entonces $-c$ es cota inferior de A.
c) Demuestre que si $s = \sup(-A)$ entonces $-s$ es ínfimo de A. Con esto habrá demostrado que cuando A es no vacío y acotado inferiormente siempre existe su ínfimo.

P3. Pruebe que:

a) $\inf\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} = 0$

b) $\sup\{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N}\} = 1$

c) $\sup\{q \in \mathbb{Q} | q^2 \leqslant 3\}$

d) $\inf\{\cos(q) | q \in Q\}$

P4. Use la denición de convergencia de una sucesión para demostrar las siguientes igualdades.

a) $\lim \dfrac{2n-5}{2n-7} = 1$

b) $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim \sqrt{4 + \dfrac{1}{2n}} = 2$

P5. Demuestre que $\sqrt{5}$ es irracional.

Recuerdos y Consejos

Axioma 8 (Axioma del Supremo) Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo

Teorema(Propiedad Arquimediana). El conjunto $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > 1$.

Teorema Los racionales son densos en los reales. Esto signica que dados dos reales x, y con $x < y$, entonces existe un racional r tal que $x < r < y$.
Observación: La densidad también se puede ver de la siguiente manera: Un conjunto D se dice denso sobre otro X (por ejemplo $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$) si para cualquier elemento X existe uno de D que esta tan cerca como uno quiera.

Definición (Convergencia) Diremos que la sucesión (s_n) converge a L o bien que los términos s_n tienden a L (lo cual anotaremos $s_n \to L$) si se cumple que: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N_0) s_n \in [L` - \varepsilon, L + \varepsilon]$.